Baden-Württemberg
MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

**Prüfungsfach:** **M a t h e m a t i k**

**Musteraufgaben 2017** **Hilfsmittelfreier Teil** **Seite 1 - 2**

---

1. Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion $f$ mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ . (2 VP)

2. Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion $f$ mit $f(x) = 4\sin(2x)$. (1 VP)

3. Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$ . (2 VP)

4. Eine Funktion $f$ hat folgende Eigenschaften:
   $f(2) = 1$
   $f'(2) = 0$
   $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$
   Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$
   Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von $f$ hat.
   Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen. (5 VP)

5. Die Gerade $g$ verläuft durch die Punkte $A(1|-1|3)$ und $B(2|-3|0)$ .
   Die Ebene $E$ wird von $g$ orthogonal geschnitten und enthält den Punkt $C(4|3|-8)$ .
   Bestimmen Sie den Schnittpunkt $S$ von $g$ und $E$ .
   Untersuchen Sie, ob $S$ zwischen $A$ und $B$ liegt. (4 VP)

6. Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E_1:\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \quad \text{und} \quad E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.

Die Ebene $E_3$ ist parallel zu $E_1$ und $E_2$ und hat von beiden Ebenen denselben Abstand. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene $E_3$. (4 VP)

7. Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch. Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.

B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch. (2 VP)

**Aufgabe 1**

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion $f$ mit

$$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8 \quad ; \quad -4 \le x \le 4 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten?
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein? (2 VP)

b) Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1,7 m hoch.
Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen? (4 VP)

c) Für die Länge $s$ eines Kurvenstücks des Graphen von $f$ im Bereich $a \le x \le b$ gilt: $s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.
Bestimmen Sie mit dieser Formel die Länge des Kurvenstücks, das im Querschnitt die Stollenwand beschreibt.
Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt der Wandfläche des Stollens größer als der Flächeninhalt seiner Bodenfläche? (3 VP)

d) Im Stollen soll auf 6 m Höhe eine Lampe aufgehängt werden.
Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1,4 m von den Wänden entfernt sein.
Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann. (3 VP)

e) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
Wie breit darf der Behälter höchstens sein? (3 VP)

**Aufgabe 2**

Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion $f_t$ gegeben durch $f_t(x) = (x-1)\cdot\left(1 - \frac{1}{t}\cdot e^x\right)$.

a) Bestimmen Sie denjenigen Wert von $t$ exakt, für den der Graph von $f_t$ die y-Achse im Punkt $S(0\,|\,e)$ schneidet. (2 VP)

b) Für welche Werte von $t$ besitzt $f_t$ mehr als eine Nullstelle? (3 VP)

**Aufgabe 1**

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist. Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion $r$ mit

$$r(t) = 10000 \cdot \left(e^{-0{,}5 \cdot t} - e^{-t}\right) \; ; \quad 0 \le t \le 12$$

beschrieben ($t$ in Stunden seit Regenbeginn, $r(t)$ in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate.
Skizzieren Sie den Graphen von $r$.
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde? (3,5 VP)

b) Zu welchen Zeitpunkten nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab bzw. zu?
Bestimmen Sie die mittlere Zuflussrate innerhalb der ersten vier Stunden. (3,5 VP)

c) Wie viel Wasser befindet sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank?
Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank? (3 VP)

d) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion $w$ mit

$$w(t) = r(t) - 400 \; ; \quad 3 \le t \le 12$$

beschrieben ($t$ in Stunden seit Regenbeginn, $w(t)$ in Liter pro Stunde).

Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden entnommen?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab?
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank. (4 VP)

**Aufgabe 2**

Gegeben ist der Graph $K$ der Funktion $f$ mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$.

a) Die Tangente an $K$ an der Stelle $x = 1$ schneidet die y-Achse im Punkt $S$.
Berechnen Sie die Koordinaten von $S$ exakt. (2 VP)

b) Der Graph $K$ begrenzt im Bereich $0 \leq x \leq 1$ mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt $A$.
Berechnen Sie $A$ exakt.
Der Graph einer ganzrationalen Funktion $g$ zweiten Grades schneidet die x-Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie $A$ ist.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von $g$. (4 VP)

Ein Würfel besitzt die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(6|0|0)$, $Q(0|6|0)$ und $R(0|0|6)$.
Gegeben ist außerdem die Ebene $E: 3x_2 + x_3 = 8$.

a) Stellen Sie den Würfel und die Ebene $E$ in einem Koordinatensystem dar.
Bestimmen Sie den Abstand von $E$ zur $x_1$-Achse. (4 VP)

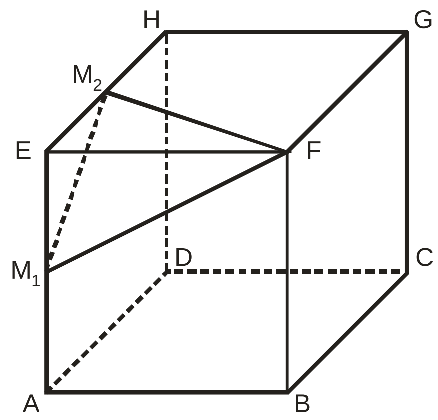
Die Ebene $E$ gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch

$$E_a: \ 3x_2 + x_3 = a \quad ; \ a \in \mathbb{R}.$$

b) Für welche Werte von $a$ hat der Punkt $S(6|6|6)$ den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene $E_a$? (2,5 VP)

c) Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?
Für welche Werte von $a$ hat die Ebene $E_a$ gemeinsame Punkte mit dem Würfel? (3,5 VP)

In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt. Es ist im Punkt $F$ sowie in den Kantenmitten $M_1$ und $M_2$ befestigt (siehe Abb.). Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte $A(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $H(0|0|8)$ die entsprechenden Ecken des Raumes dar.




a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $S$, in der das Segeltuch liegt.
(Teilergebnis: $S: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$)

Welchen Winkel bildet das Segeltuch mit der Decke des Raumes?
Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke $E$? (4 VP)

b) Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs. (3 VP)

c) Auf der Diagonalen $AC$ steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden.
Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch.
In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange? (3 VP)

Beim Blutspenden ist nicht nur die Blutgruppe (0, A, B oder AB), sondern auch der Rhesusfaktor ($Rh^+$ oder $Rh^-$) von Bedeutung. Die Tabelle zeigt die Häufigkeitsverteilung für Blutgruppen und zugehörige Rhesusfaktoren in Deutschland.

| Blutgruppe | 0 | | A | | B | | AB | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeit | 41% | | 43% | | 11% | | 5% | |
| Rhesusfaktor | 0 $Rh^+$ | 0 $Rh^-$ | A $Rh^+$ | A $Rh^-$ | B $Rh^+$ | B $Rh^-$ | AB $Rh^+$ | AB $Rh^-$ |
| Häufigkeit | 35% | 6% | 37% | 6% | 9% | 2% | 4% | 1% |

a) Zwanzig Personen gehen nacheinander zum Blutspenden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
$E_1$: Genau zehn Personen haben Blutgruppe A .
$E_2$: Mehr als fünf Personen haben einen negativen Rhesusfaktor.
$E_3$: Nur die ersten beiden Personen haben Blutgruppe AB .
$E_4$: Genau drei Personen haben Blutgruppe B und diese drei Personen kommen unmittelbar nacheinander. (5 VP)

b) Eine Zufallsvariable beschreibt die Anzahl der Personen mit Blutgruppe AB in einer Stichprobe von 500 Personen.
Es gibt zum Erwartungswert $\mu$ symmetrische Intervalle $I_c = [\,\mu - c\,;\,\mu + c\,]$, sodass diese Anzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% in $I_c$ liegt.
Bestimmen Sie die kleinstmögliche natürliche Zahl $c$ . (2,5 VP)

c) Personen mit Blutgruppe 0 und negativem Rhesusfaktor gelten als „Universalspender“ und sind daher als Blutspender ideal.
Wie groß müsste der Anteil dieser Universalspender in einer Bevölkerungsgruppe mindestens sein, damit sich unter 150 Blutspendern mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% mehr als zehn Universalspender befinden? (2,5 VP)

Auf zwei Glücksrädern befinden sich jeweils sechs gleich große Felder. Bei jedem Spiel werden die Räder einmal in Drehung versetzt. Sie laufen dann unabhängig voneinander aus und bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau ein Feld im Rahmen sichtbar ist.


Für die Aufgabenteile a) bis c) werden die Räder als ideal angenommen.

a) Ein Kunde spielt das Spiel zehn Mal.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt er das Ergebnis „Kleeblatt – Kleeblatt“ genau zwei Mal? (1 VP)

Bei einem Einsatz von 0,20 € sind folgende Auszahlungen vorgesehen:

| | |
|---|---|
| Stern – Stern | 2,00 € |
| Diamant – Diamant | 0,85 € |
| Kleeblatt – Kleeblatt | 0,20 € |

In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt.

b) Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist.
Nun möchte der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 5 Cent Gewinn erzielen.
Dazu soll nur der Auszahlungsbetrag für „Diamant – Diamant“ geändert werden.
Berechnen Sie diesen neuen Auszahlungsbetrag. (3 VP)

c) Wie oft muss man das Spiel mindestens spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 98% mindestens fünf Mal etwas ausgezahlt zu bekommen? (3 VP)

d) Es besteht der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit $p$ für „Stern – Stern“ geringer als $\frac{1}{36}$ ist. Daher soll ein Test mit 500 Spielen durchgeführt werden.
Formulieren Sie die Entscheidungsregel für die Nullhypothese $H_0: p \geq \frac{1}{36}$, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5% betragen soll. (3 VP)