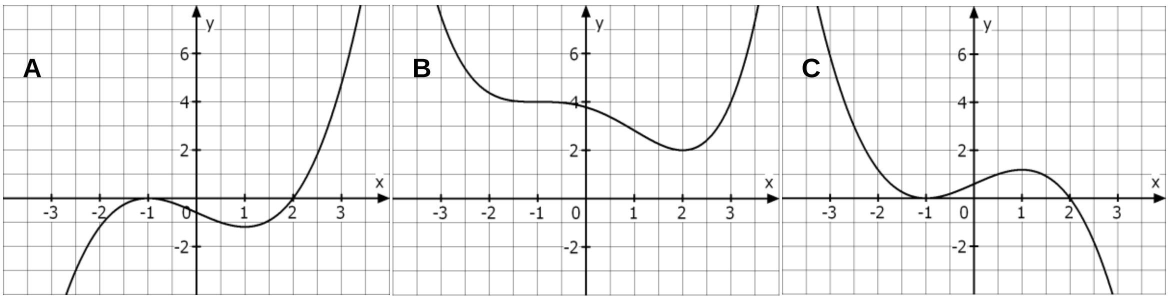
BEISPIEL A — **Punkte**

1.1 Geben Sie Lage und Art der Nullstellen der Funktion f mit
$f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2(x+\frac{4}{3})$; $x \in \mathbb{R}$ an. 3

1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $P(2\,|\,f(2))$ an das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}x)+x$; $x \in \mathbb{R}$. 4

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte des Schaubildes der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^4-6x^2+13$; $x \in \mathbb{R}$. 4

1.4 Gegeben sind die Abbildungen A, B und C. Sie zeigen die Schaubilder einer Funktion h, der Ableitungsfunktion h' von h und einer weiteren Funktion k.
Begründen Sie, welche Abbildung zum Schaubild von h, h' und k gehört.



3

1.5 Das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades hat den Hochpunkt $H(0|4)$, den Tiefpunkt $T(1|2)$ und an der Stelle -1 die Steigung 12.
Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, mit dessen Hilfe sich der Term dieser Funktion bestimmen lässt.
(Das Berechnen der Lösungen des LGS ist nicht erforderlich.) 5

1.6 Bestimmen Sie $u>0$ so, dass $\int_0^u \frac{1}{2}x^4\,dx = 3{,}2$. 4

1.7 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=3e^{-2x}-\frac{5}{2}$; $x \in \mathbb{R}$, ihr Schaubild ist K_f.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_f.
Skizzieren Sie K_f. 5

1.8 Das Schaubild der Funktion f mit $f(x)=\sin(x)$; $x \in \mathbb{R}$ wird um den Faktor 5 in y-Richtung gestreckt und um 3 nach rechts verschoben.
Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm an. 2

30

BEISPIEL A | **Punkte**

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

1.1 Die Nullstellen liegen bei $x_1 = 3$ und $x_2 = -\frac{4}{3}$.
x_1 ist eine doppelte Nullstelle, das heißt das Schaubild berührt die x-Achse,
x_2 ist eine einfache Nullstelle, das heißt das Schaubild schneidet die x-Achse. 3

1.2 $f(2) = 2{,}5$; $f'(x) = \frac{\pi}{8}\cos(\frac{\pi}{4}x) + 1$; $f'(2) = 1$,
die Tangente hat die Gleichung $y = x + \frac{1}{2}$. 4

1.3 $f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 12x$; $f''(x) = 4x^2 - 12$; $f'''(x) = 8x$
$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; $f'''(x_{1,2}) \neq 0$
$f(\pm\sqrt{3}) = -2$, also $W_{1,2}(\pm\sqrt{3}\,|\,-2)$ 4

1.4 Das Schaubild in B hat bei $x = -1$ einen Sattelpunkt und bei $x = 2$ einen Tiefpunkt. Somit hat das Schaubild der Ableitung hiervon bei $x = -1$ eine doppelte Nullstelle und bei $x = 2$ eine einfache Nullstelle. Dies trifft auf A und C zu. Da das Schaubild in B für $x < 0$ fällt, kann nur A die Ableitung darstellen.
Damit: B zeigt das Schaubild von h, A das von h' und C das von k. 3

1.5 Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$; $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$$\begin{array}{lcrcl}
f(0) = 4 & & e & = & 4 \\
f'(0) = 0 & & d & = & 0 \\
f(1) = 2 & \Rightarrow & a + b + c + d + e & = & 2 \\
f'(1) = 0 & & 4a + 3b + 2c + d & = & 0 \\
f'(-1) = 12 & & -4a + 3b - 2c + d & = & 12
\end{array}$$

5

1.6 $\int_0^u \frac{1}{2}x^4\,dx = 3{,}2 \iff \left[\frac{1}{10}x^5\right]_0^u = 3{,}2 \iff \frac{1}{10}u^5 = 3{,}2 \iff u = \sqrt[5]{32}$ 4

BEISPIEL A **Punkte**

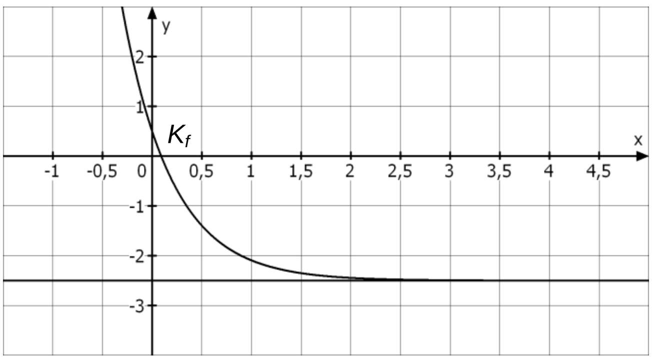
L Ö S U N G S V O R S C H L A G

1.7 Schnittpunkt mit y-Achse: $x=0$, $y=f(0)=3e^{-2\cdot 0}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$, also $S_y(0\,|\,\frac{1}{2})$

Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x)=0 \;\Rightarrow\; 3e^{-2x}-\frac{5}{2}=0 \;\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\ln(\frac{5}{6})$, also

$N(-\frac{1}{2}\ln(\frac{5}{6})\,|\,0)$

Skizze:



5

1.8 $\tilde{f}(x)=5\sin(x-3)$ 2

30

BEISPIEL B **Punkte**

1.1 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$. 4

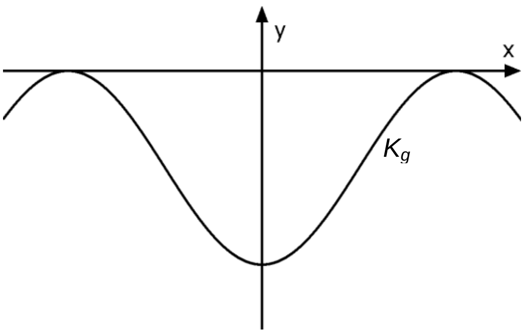
1.2 Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \mathrm{e}^{4x}$ und $g(x) = 3\mathrm{e}^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass sich die Schaubilder der Funktionen f und g genau einmal schneiden. 3

1.3 Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion hat die benachbarten Hochpunkte $H_1(\frac{\pi}{2}\,|\,3)$ und $H_2(\frac{3\pi}{2}\,|\,3)$ sowie eine Amplitude von 2.
Geben Sie die Koordinaten des dazwischen liegenden Tiefpunktes und eines Wendepunktes an. 4

1.4 Bestimmen Sie die Stammfunktion von $g(x) = 2\mathrm{e}^{-4x} + 4x - 3$; $x \in \mathbb{R}$, deren Schaubild die y-Achse bei 6 schneidet. 4

1.5 Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(2x)\,dx$. 4

1.6 In der nebenstehenden Abbildung schließen das zur y-Achse symmetrische Schaubild K_g der Funktion g und die x-Achse eine Fläche ein.
In diese wird ein achsenparalleles Rechteck einbeschrieben.
Geben Sie eine Zielfunktion an, mit deren Hilfe das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt bestimmt werden kann. 3



1.7 Das Schaubild K_g aus 1.6 ist das Schaubild der Ableitungsfunktion der Funktion h, es gilt also $h' = g$.
Treffen Sie Aussagen über die Lage und Anzahl der Wendestellen von h. 3

1.8 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 6 \\ 3x + 2z &= -3 \\ -y - z &= -1 \end{aligned}$$

5

30

BEISPIEL B — **Punkte**

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

1.1 Substitution $a = x^2$ führt zu $a^2 - 7a + 12 = 0$.

$$a_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Resubstitution ergibt die Lösungen $x_{1,2} = \pm 2$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$ — 4

1.2 Gemeinsame Punkte: $f(x) = g(x)$

$$e^{4x} = 3e^{2x} \Leftrightarrow e^{4x} - 3e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(e^{2x} - 3) = 0$$

Einzige Lösung ist $x = \frac{1}{2}\ln 3$. — 3

1.3 Tiefpunkt $T(\pi \mid -1)$, Wendepunkt z. B. $W(\frac{3}{4}\pi \mid 1)$ — 4

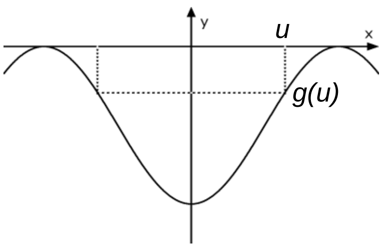
1.4 Stammfunktion von $g(x) = 2e^{-4x} + 4x - 3$: $G(x) = -\frac{1}{2}e^{-4x} + 2x^2 - 3x + C$

Punktprobe mit $(0 \mid 6)$: $-\frac{1}{2} + C = 6 \Leftrightarrow C = 6{,}5$

$G(x) = -\frac{1}{2}e^{-4x} + 2x^2 - 3x + 6{,}5$ — 4

1.5 $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(2x)\,dx = \left[-\frac{3}{2}\cos(2x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2}\cos(\pi) - \left(-\frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3}{2}$$ — 4

1.6 Skizze (n. v.)



Zielfunktion: $A(u) = 2u \cdot (-g(u))$
(für $u > 0$) — 3

1.7 h' hat drei Extremstellen, somit hat h drei Wendestellen, nämlich eine auf der y-Achse und zwei, die symmetrisch zur y-Achse liegen. — 3

1.8 Lösung des LGS: z. B. Addition aller drei Gleichungen ergibt $4x = 2$.
Somit ist $x = \frac{1}{2}$, $z = -\frac{9}{4}$ und $y = \frac{13}{4}$ — 5

30

Punkte

2.1 Das Schaubild einer Funktion 3. Grades berührt die x-Achse bei $x = -3$ und verläuft durch den Ursprung.
Weiterhin liegt der Punkt $A(1|\frac{16}{3})$ auf dem Schaubild der Funktion.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion. 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunktes von K_f.
Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem. 8

2.3 Berechnen Sie $\int_{-3}^{1} f(x)dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. 5

Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = -x^2 - 3$ und $h(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Schaubilder heißen K_g und K_h.

2.4 Skizzieren Sie die Schaubilder K_g und K_h. 3

2.5 K_h soll in y-Richtung so verschoben werden, dass K_g den verschobenen Graphen auf der y-Achse schneidet.
Bestimmen Sie den neuen Funktionsterm. 2

2.6 Die Kurve K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = -7$ begrenzen eine Fläche. In diese Fläche soll ein zur y-Achse symmetrisches Dreieck mit den Eckpunkten $S(0|-7)$ und $P(u|g(u))$ mit $0 \le u \le 2$ einbeschrieben werden.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für $u = 1$.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks für $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ maximal wird. 7

30

Punkte

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

2.1 1. Möglichkeit: Produktansatz $f(x) = a \cdot x(x+3)^2$
wegen doppelter Nullstelle bei $x = -3$ und einfacher Nullstelle bei $x = 0$
Punktprobe mit $A(1|\frac{16}{3})$: $a \cdot 1 \cdot 4^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$
Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$

2. Möglichkeit: Allgemeiner Ansatz $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

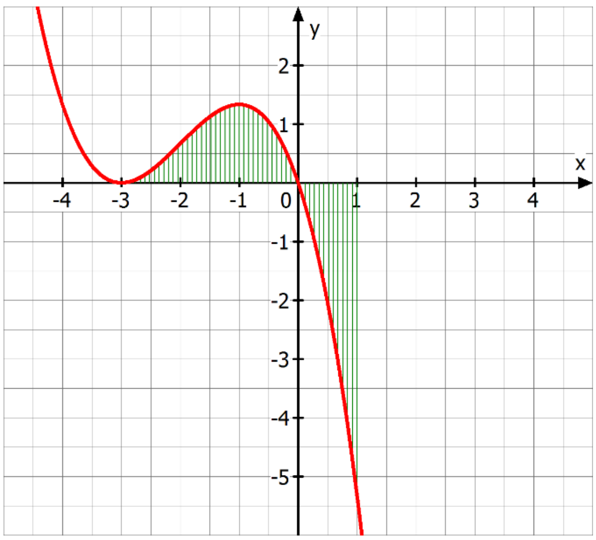
Punkt $O(0|0)$: $f(0) = 0$ $d = 0$
Punkt $A(1|\frac{16}{3})$: $f(1) = \frac{16}{3}$ $a + b + c + d = \frac{16}{3}$ $a + b + c = \frac{16}{3}$
Punkt $N(-3|0)$: $f(-3) = 0$ $-27a + 9b - 3c + d = 0$ $-27a + 9b - 3c = 0$
Berührung: $f'(-3) = 0$ $27a - 6b + c = 0$ $27a - 6b + c = 0$

Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{16}{3} \\ -27 & 9 & -3 & 0 \\ 27 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{16}{3} \\ 0 & 36 & 24 & 144 \\ 0 & -33 & -26 & -144 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{16}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & -33 & -26 & -144 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{16}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow c = 3;\ b = 2;\ a = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$ 5

2.2 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$
$f'(x) = -x^2 - 4x - 3$
$f''(x) = -2x - 4$
Extrempunkte: $f'(x) = 0$
$-x^2 - 4x - 3 = 0$
$x_1 = -3,\ f''(-3) = 2 > 0,\quad T(-3|0)$
$x_2 = -1,\ f''(-1) = -2 < 0,\quad H(-1|\frac{4}{3})$ 8

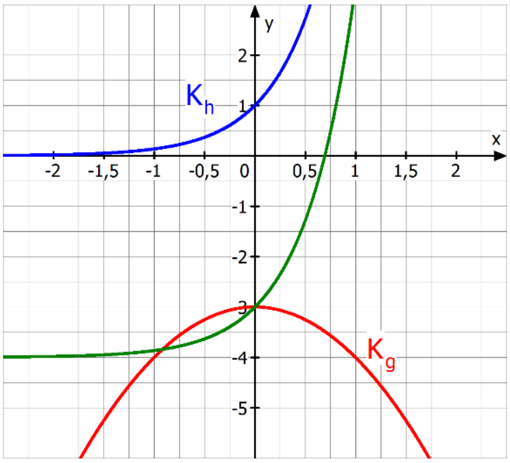


2.3 $\int_{-3}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{1} (-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x)dx$
$= \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{1}$
$= -\frac{1}{12} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - (-\frac{27}{4} + 18 - \frac{27}{2}) = 0$

Die Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß und heben sich im Integral somit auf. 5

Punkte

2.4 Schaubilder siehe rechts 3



2.5 $h(x) = e^{2x}$; $g(x) = -x^2 - 3$

Die neue Funktion muss an der Stelle $x = 0$ den selben Funktionswert haben wie g, d. h. $h(0) + d = g(0)$.

$$e^{2\cdot 0} + d = -0^2 - 3$$
$$1 + d = -3$$
$$d = -4$$

Neuer Funktionsterm: $e^{2x} - 4$ 2

2.6 Zielgröße: $A_\Delta = \frac{1}{2} a \cdot h_a$

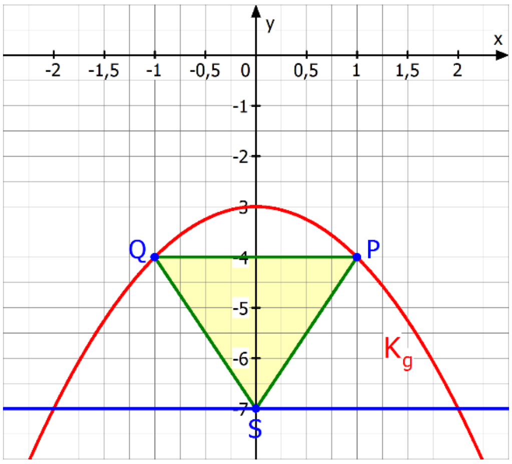
Nebenbedingungen: $a = 2u$
$h_a = f(u) + 7$

Zielfunktion: $A(u) = \frac{1}{2} a \cdot h_a = u \cdot (f(u) + 7)$
$= u \cdot (-u^2 + 4) = -u^3 + 4u$

Extremwert: $A'(u) = -3u^2 + 4 = 0$
$\Rightarrow \; u = \sqrt{\frac{4}{3}}$, da $u > 0$

Randwerte: $A(0) = A(2) = 0$

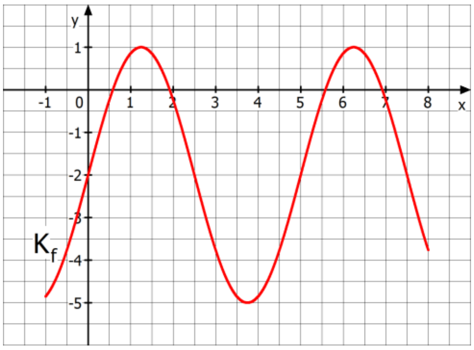
Für $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal. 7



30

Punkte

3.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(k \cdot x) + b$ für $x \in [-1; 8]$.
Ihr Schaubild K_f ist im folgenden Koordinatensystem dargestellt.
Ermitteln Sie passende Werte für a, k und b anhand der Abbildung. 4



3.2 Zusätzlich ist die Funktion g mit $g(x) = -3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 2$ für $x \in [0; 4\pi]$ gegeben. Ihr Schaubild sei K_g.

Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte von K_g an. 4

3.3 Bestimmen Sie für die nachfolgenden Problemstellungen jeweils einen passenden Funktionsterm:

3.3.1 Der Temperaturverlauf an einem Sommertag soll durch eine trigonometrische Funktion beschrieben werden.
Um 14 Uhr erreicht die Temperatur den höchsten Wert von 28 °C.
Die tiefste Temperatur des Tages betrug 8 °C um 2 Uhr. 3

3.3.2 Eine Saunakabine kühlt exponentiell ausgehend von einer Temperatur von 60 °C ab. Nach 10 Minuten hat die Kabine noch eine Temperatur von 40 °C. Die Umgebungstemperatur beträgt 4 °C. 5

Nachfolgend ist die Funktion h gegeben durch $h(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 2$ für $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild sei K_h.

3.4 Weisen Sie nach, dass K_h keine Extrempunkte und keine Wendepunkte hat, und geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_h an. 4

3.5 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an K_h im Punkt $P\left(-2 \mid h(-2)\right)$. 3

3.6 K_h und die Koordinatenachsen schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt. 7

30

Punkte

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

3.1 abgelesen: Periodenlänge 5 mit $p=\frac{2\pi}{k} \Rightarrow \quad k=\frac{2\pi}{5}=\frac{2}{5}\pi$

$y_{HP}=1$ und $y_{TP}=-5 \quad \Rightarrow a=\frac{y_{HP}-y_{TP}}{2}=\frac{1-(-5)}{2}=3$

$\Rightarrow b=\frac{y_{HP}+y_{TP}}{2}=\frac{1+(-5)}{2}=-2$ 4

3.2 $g(x)=-3\cdot\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+2$

Amplitude: 3 Verschiebung in Richtung der y-Achse: um 2 nach oben

Periode: $p=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{0{,}5}=4\pi$

Das Schaubild eines negativen Kosinus weist auf der y-Achse einem TP auf:
$T_1(0|-1)$ und damit auch $T_2(4\pi|-1)$ 1

Nach der halben Periode muss ein Hochpunkt liegen: $H(2\pi|5)$ 1

Die Wendepunkte finden sich auf Höhe der Verschiebung in Richtung der y-Achse und liegen beim Kosinus nach einem Viertel und nach drei Viertel der Periodenlänge: $W_1(\pi|2)$ $W_2(3\pi|2)$ 2

3.3.1 Trigonometrische Funktion ; z. B. x = 0 bei 14 Uhr ; Amplitude: $\frac{28-8}{2}=10$

Verschiebung y-Achse: $\frac{28+8}{2}=18$; Periodenlänge 24 h also: $b=\frac{2\pi}{24}=\frac{1}{12}\pi$

<u>Damit:</u> z. B.: $f(x)=10\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right)+18$ 3

3.3.2 Exponentialfunktion mit Ansatz: $f(x)=a\cdot e^{k\cdot t}+b$

Umgebungstemperatur = 4 °C ; Asymptote: $y=4=b$

$f(0)=a\cdot e^{k\cdot 0}+b=60$ mit $b=4$ folgt daraus: $a=56$

bzw. Vorfaktor a = Maximaltemperatur - Umgebungstemperatur $=60-4=56$

Vorfaktor k im Exponent: $56\cdot e^{k\cdot 10}+4=40 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{9}{14}\right)\approx-0{,}044$

<u>Damit:</u> z. B.: $f(x)=56\cdot e^{-0{,}044\cdot x}+4$ 5

3.4 $h(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-2$

$h'(x)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x}\neq 0 \Rightarrow$ keine Extrema

2

$h''(x)=\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x}\neq 0 \quad \Rightarrow$ keine Wendepunkte

<u>Asymptote</u>: Existiert nur für $x\to\infty$ und lautet: $y=-2$ 2

Punkte

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

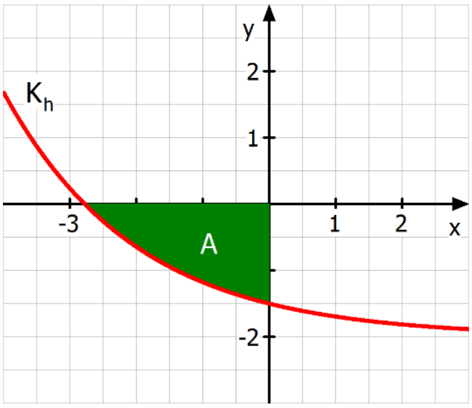
3.5 $P\left(-2 \mid h(-2)\right)$: $h(-2)=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2)}-2=\frac{1}{2}e-2$

Tangentensteigung: $h'(-2)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2)}=-\frac{1}{4}e$

Achsenabschnitt: $P\left(-2 \,\middle|\, \frac{1}{2}e-2\right)$: $\frac{1}{2}e-2=-\frac{1}{4}e\cdot(-2)+b \quad \Rightarrow b=-2$

Tangente im Punkt P: $t(x)=-\frac{1}{4}e\cdot x-2$ 3

3.6 Skizze der zu berechnenden Fläche (nicht verlangt):



Nullstelle von h: $h(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2\cdot\ln(4)\approx-2{,}77$ 2

$$\int_{-2\ln(4)}^{0}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-2\right)dx=\left[-e^{-\frac{1}{2}x}-2x\right]_{-2\ln(4)}^{0}$$

$$=-e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}-2\cdot 0-\left(-e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2\ln(4))}-2\cdot(-2\ln(4))\right)$$

$$=-1+4-4\ln(4)=3-4\ln(4)$$

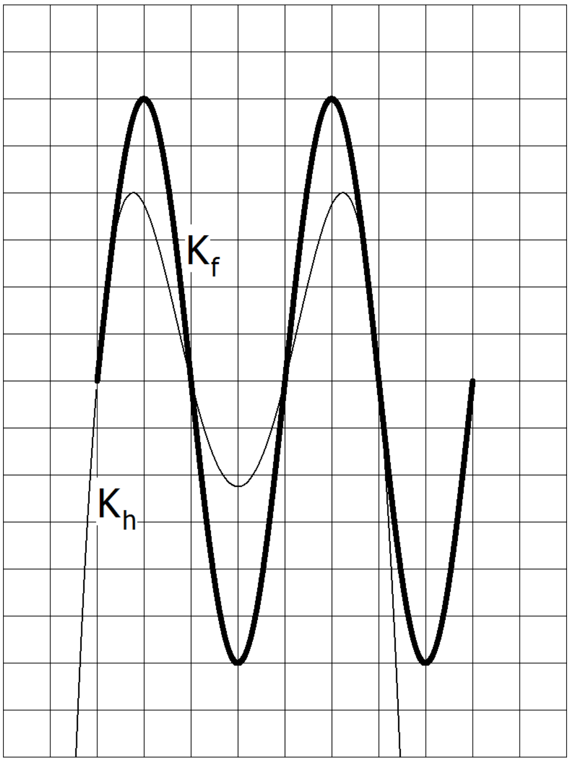
da A unterhalb der x-Achse liegt gilt: $A=4\ln(4)-3\approx 2{,}55$

(Das bestimmte Integral kann auch mit der Dezimalzahl als Untergrenze ermittelt werden). 5

30

Punkte

4.1 Gegeben ist das Schaubild K_f einer Funktion f und das Schaubild K_h einer Funktion h.
Der Term von f lautet $f(x) = 6\sin(\pi \cdot x)$; $x \in [0;k]$.
Ergänzen Sie die *x*- und die *y*-Achse so, dass die vorgegebene Kurve K_f das Schaubild von f darstellt.



2

4.2 Ermitteln Sie die Periode, die Amplitude, die Nullstellen von f und den Wert von k.
Skalieren Sie dann obiges Koordinatensystem. 4

4.3 Beschreiben Sie, wie K_f aus dem Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ hervorgeht. 3

4.4 In welchen Kurvenpunkten von K_f beträgt die Steigung -6π? 3

Punkte

Der Term von h lautet $h(x) = -4x^4 + 24x^3 - 44x^2 + 24x$; $x \in \mathbb{R}$.

4.5 Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an K_h an der Stelle $x = 2$.
Anton behauptet: „Es gibt keine Tangenten an K_h mit einer größeren Steigung als die Tangente an der Stelle $x = 2$.
Nehmen Sie zu dieser Behauptung Stellung. 5

4.6 Die Schaubilder von f und h schneiden sich an den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ und schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. 5

Welche der folgenden Aussagen sind falsch, welche richtig und welche sind nur bedingt richtig?
Geben Sie für die falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.
Geben Sie für die bedingt richtigen Aussagen eine Bedingung an, unter welcher sie richtig sind.

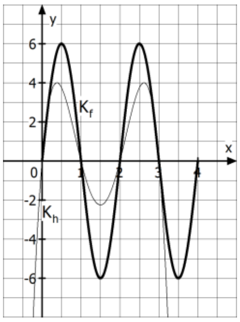
4.7 a) Leitet man die Funktion f mit $f(x) = 2\cos(b \cdot x)$ mehrmals ab, wird die Amplitude der Schaubilder der Ableitungsfunktionen immer größer.
b) Die Funktionen f mit $f(x) = e^{k \cdot x}$; $x \in \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
c) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.
d) Eine Polynomfunktion 4. Grades, deren Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist, hat auf der y-Achse eine Wendestelle. 8

30

Punkte

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

4.1 Achsen:



(incl. Skalierung für 4.2) 2

4.2 Periode: 2, Amplitude: 6
Nullstellen: $f(x) = 0$ liefert $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$; $x_5 = 4$.
Damit ist $k = 4$. 4

4.3 Das Schaubild von g wird mit dem Faktor 6 in y-Richtung gestreckt und mit dem Faktor $\frac{1}{\pi}$ in x-Richtung gestreckt. 3

4.4 $f'(x) = -6\pi$, also $6\pi\cos(\pi \cdot x) = -6\pi$; man erhält $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.
Damit sind $P_1(1|0)$ und $P_2(3|0)$ die gesuchten Kurvenpunkte. 3

4.5 Die Tangentengleichung lautet $y = 8x - 16$, da $h'(2) = 8$ und $h(2) = 0$. 2
Anton hat nicht recht: da $h''(2) \neq 0$, ist $x = 2$ nicht die Stelle mit der größten Steigung zwischen den beiden Extrempunkten.
Alternativ könnte man eine beliebige andere Stelle testen, z. B. $h'(0) = 18$. 3

4.6 Man berechnet $\int_0^1 (f(x) - h(x))dx = \int_0^1 (6\sin(\pi x) + 4x^4 - 24x^3 + 44x^2 - 24x))dx$.
Mit Hilfe der Stammfunktion erhält man

$$\left[-\frac{6}{\pi}\cos(\pi x) + \frac{4}{5}x^5 - 6x^4 + \frac{44}{3}x^3 - 12x^2\right]_0^1 = \frac{12}{\pi} - \frac{38}{15} \approx 1{,}29.$$ 5

4.7 a) Bedingt richtig für $b > 1$
b) Bedingt richtig für $k > 0$
c) Richtig
d) Falsch: $f(x) = x^4$ 8

30