MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

MUSTER 1 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2016/2017

Hauptprüfung	**AUFGABEN FÜR DAS FACH**
	Mathematik (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Arbeitszeit	270 Minuten
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt der Schüler genau dann, wenn er den ersten Teil unwiderruflich abgegeben hat.
Stoffgebiet	**Teil 1:** Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben) — S. 2 - 5 **Teil 2:** Analysis (1 Aufgabe) — S. 6 - 7 Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben) — S. 8 - 10 **Teil 3:** Stochastik (2 Aufgaben) — S. 11 - 12 **Teil 4:** Lineare Algebra: Vektorgeometrie (1 Aufgabe) — S. 13 Lineare Algebra: Matrizen (1 Aufgabe) — S. 14
Bemerkungen	In Teil 1 wählt die Fachlehrkraft das unterrichtete Wahlgebiet aus. Es sind alle 3 vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten. (Pflichtteile: Analysis und Stochastik) In Teil 2 ist die Aufgabe 1 zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 2, 3 und 4 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Aus Teil 3 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. In Teil 4 wählt die Fachlehrkraft - je nach unterrichtetem Wahlgebiet - eine Aufgabe aus. Die vorgelegte Aufgabe ist zu bearbeiten. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.

Punkte

1 Analysis

1.1 Erläutern Sie anhand einer Skizze, ob das Integral 3

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(x)dx$$

größer, kleiner oder gleich Null ist.

1.2 Für eine Funktion f gilt: 4

(1) $f'(x) = 0$ für $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$

(2) $f''(-2) = -3$

(3) $f''(1) = 3$

(4) $f(-2) = \frac{19}{3}$

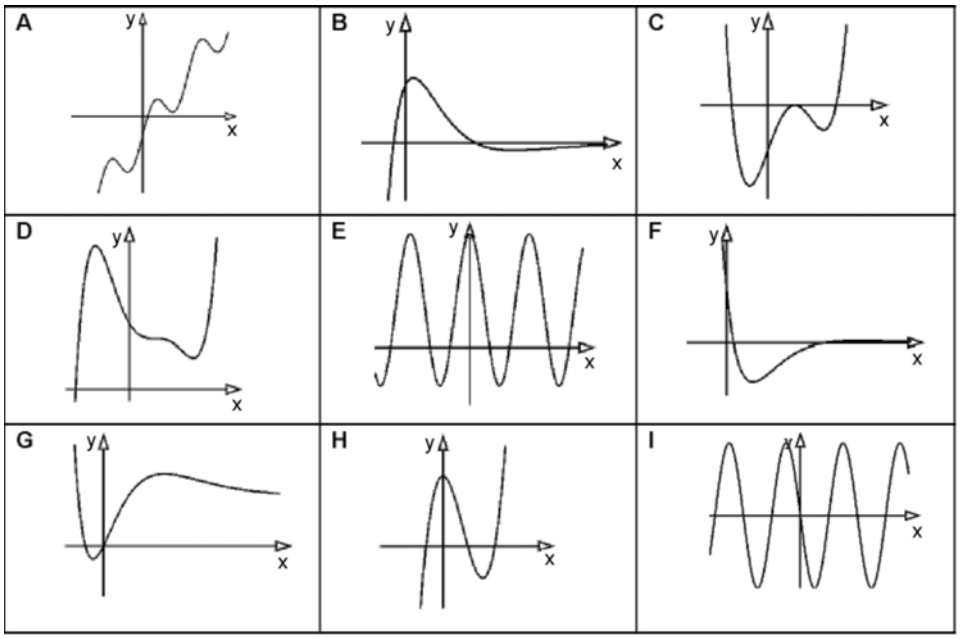
(5) $f(1) = \frac{11}{6}$

Welche Aussagen lassen sich daraus für das Schaubild von f treffen?

1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$. 4

Geben Sie die Periode von f an.
Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $\cos(2x) = -1$.

1.4 Die Abbildungen zeigen Schaubilder von drei Funktionen sowie deren zugehörigen ersten und zweiten Ableitungen. 5
Ordnen Sie jeweils dem Schaubild der Funktion das Schaubild ihrer ersten und zweiten Ableitung zu:



16

Punkte

2 Stochastik

2.1 Eine Laplace-Münze wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt man zweimal Zahl und einmal Bild? 2

2.2 Bei einer Blutspendenaktion werden die Blutgruppen der Spender bestimmt. 2
Ein Ereignis ist: „In einer Gruppe von fünf Freunden hat niemand die Blutgruppe Null."
Beschreiben Sie das Gegenereignis in Worten.

2.3 Die Zufallsvariable X hat folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung: 3

x_i	-3	-1	0	5
$P(X = x_i)$	0,2	u	w	0,2

Der Erwartungswert von X beträgt 0,2.

Berechnen Sie u und w.

7

Punkte

3 Lineare Algebra: Wahlgebiet Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

3.1 Gegeben ist die Gerade 4

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}.$$

Stellen Sie die Gerade g in einem räumlichen Koordinatensystem dar.
Beschreiben Sie die Lage von g im Raum.

3.2 Untersuchen Sie die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems 3

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \; .$$

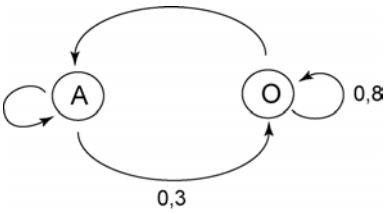
7

Punkte

4 Lineare Algebra: Wahlgebiet Matrizen (AG, BTG, EG, SGG, WG)

4.1 Die Kunden eines Getränkemarktes kaufen wöchentlich eine der beiden Fruchtsaftspezialitäten Apfelsaft (A) oder Orangensaft (O). Das Übergangsdiagramm beschreibt das Kaufverhalten der Kunden von einer Woche zur folgenden Woche. 4

Man nimmt an, dass sich das Kaufverhalten auf Dauer nicht verändert.



Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ 0{,}3 & \dots \end{pmatrix}$ an.

Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente der Hauptdiagonale von M^2.

4.2 Gegeben ist die Matrix 3

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Matrizengleichung $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0}$;
E ist hierbei die zugehörige Einheitsmatrix.

7

Punkte

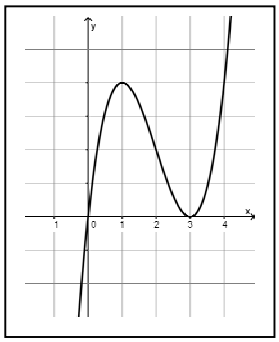
1 Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -2x^2(x-3);\ x \in \mathbb{R}.$$

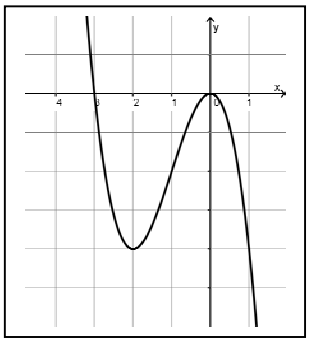
Das Schaubild von f ist K.

1.1 Eine der folgenden Abbildungen zeigt das Schaubild K. 6
Untersuchen Sie für jede der Abbildungen, ob es sich um das Schaubild K handeln kann.
Skalieren Sie auf dem beiliegenden Arbeitsblatt (Seite 7) bei derjenigen Abbildung, die K zeigt, die y-Achse.

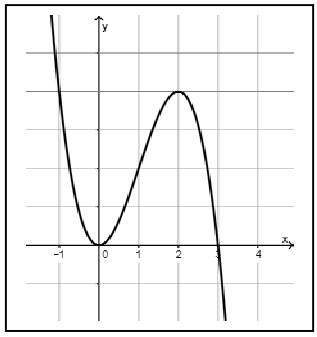
A



B



C



1.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von f mit der x-Achse einschließt. 5

1.3 Die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 8$ zerlegt die Fläche zwischen K und der x-Achse in zwei Teilflächen. 5
Ermitteln Sie einen Term, mit dem der Inhalt einer der beiden Teilflächen berechnet werden kann und kennzeichnen Sie in der Abbildung aus 1.1 auf dem Arbeitsblatt (Seite 7) die von Ihnen gewählte Fläche.

1.4 Die Abbildung A zeigt das Schaubild einer Funktion g. 4
Begründen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

1. $g''(3) < 0$
2. Bei $x = 1$ hat g' einen Vorzeichenwechsel von + nach –.
3. An der Stelle $x = 2$ hat das Schaubild von g' einen Hochpunkt.
4. Die momentane Änderungsrate von g an der Stelle $x = 3$ ist größer als die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall [1; 2].

20

Zu- und Vorname:

Schulnummer	Schülernummer

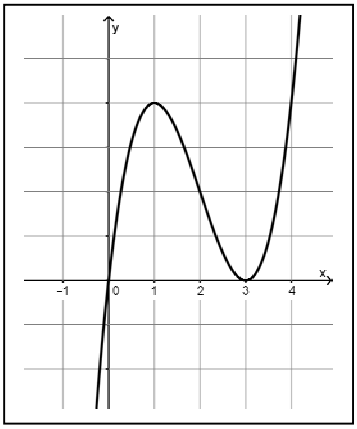
✂----------

Musterabitur 1	Berufliches Gymnasium		
	Mathematik		
Arbeitsblatt	Teil 2	Aufgabe 1	Seite 2/2

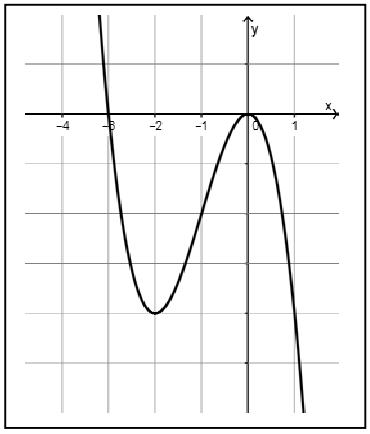
Schulnummer	Schülernummer

Arbeitsblatt:

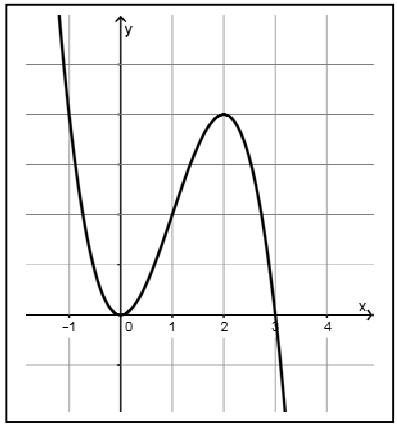
A:



B:

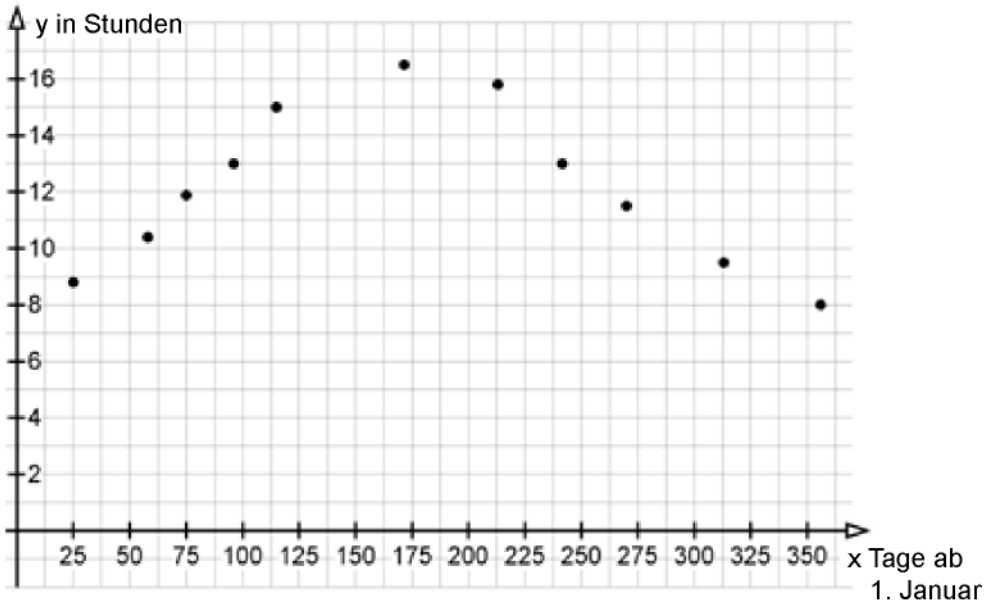


C:



Punkte

2 Im Verlauf eines Jahres ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d. h. die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.
In unseren Breiten ist die Sonne am 21. Juni mit ca. 16,5 Stunden am längsten und am 21. Dezember mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.



2.1 Die Messergebnisse sollen durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden. 6
Geben Sie einen geeigneten Funktionsterm an.

2.2 Tina und Tom haben jeweils einen Funktionsterm bestimmt. 4
Tina hat die Daten durch eine quadratische Regression mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}8745$, Tom durch eine Regression 4. Grades mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}9784$ angenähert.

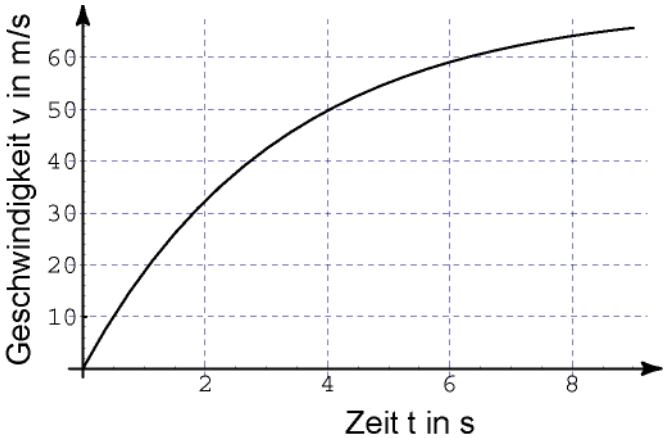
Bewerten Sie die Güte der beiden Näherungsfunktionen.
Kann man mithilfe Toms Näherungsfunktion die astronomische Sonnenscheindauer im nächsten Jahr vorhersagen?
Begründen Sie Ihre Antwort.

10

Punkte

3 Bei einem Beschleunigungsrennen (Drag Race) versuchen die Teilnehmer mit ihren Rennwagen eine kurvenfreie Strecke in möglichst kurzer Zeit zurückzulegen.

Der Bordcomputer des Fahrzeuges eines Teilnehmers nahm den in der Abbildung dargestellten Geschwindigkeitsverlauf auf.



Dieser Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit lässt sich durch die Funktion v mit

$$v(t) = -70e^{-0,313 \cdot t} + 70 \; ; \; 0 \le t \le 8,75$$

modellieren.
Verwenden Sie für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben dieses Modell.

3.1 Nach wieviel Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ km/h$ erreicht? 4

3.2 Nach 8,75 Sekunden fährt das Fahrzeug durch das Ziel. 6

Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs.
Welche Länge hat die Rennstrecke?

10

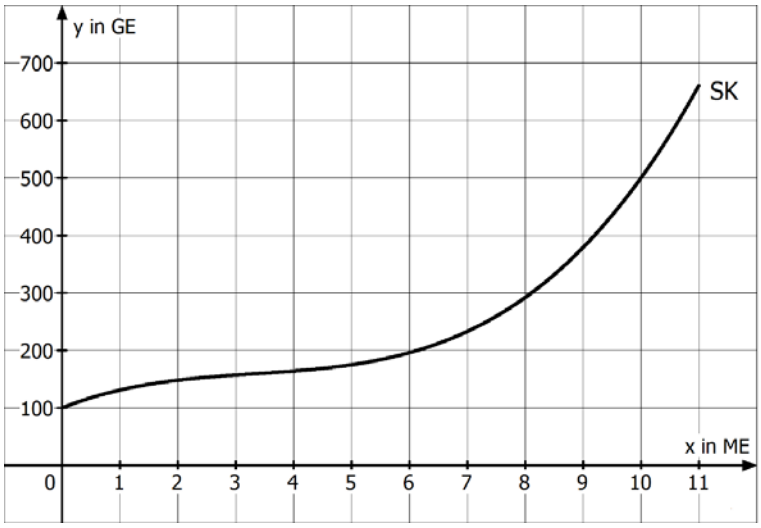
Punkte

4 Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung eines Produktes werden durch die Funktion K mit

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 40x + 100 \; ; \quad x \in [0; 11]$$

beschrieben. Dabei bezeichnen x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und K(x) die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE). Der Verkaufspreis beträgt 50 GE. Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge und der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.

Die Grafik zeigt das Schaubild SK der Funktion K.



4.1 Ermitteln Sie die Funktionsterme der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G. 4

Prüfen Sie, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist.

4.2 Von G sind die beiden Nullstellen $x_1 = \sqrt{10}$ und $x_2 = 10$ bekannt. 4
Skizzieren Sie das Schaubild von G für $x \in [0; 11]$.

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem die Produktionsmenge liegen muss, damit das Unternehmen keinen Verlust macht.
Bestimmen Sie die Gewinnzone.

4.3 Die Unternehmensleitung möchte wissen, für welche Produktionsmenge die Kosten am geringsten ansteigen. Berechnen Sie diese Produktionsmenge. 2

10

Punkte

1 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse: 3

A: Von drei Januartagen ist genau ein Tag ein Sturmtag.

B: Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag.

1.2 Der Besitzer eines Hotels bietet folgendes Angebot für sieben Tage Halbpension im Monat Januar an: Falls der Gast mehr als zwei Sturmtage erlebt, erhält er eine Rückerstattung von 100 €. 4

Ein Gast erhält die Rückerstattung von 100 €. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau drei Sturmtage erlebt?

1.3 Der Hotelier plant, an den Sturmtagen ein Wellnessangebot anzubieten. Um die Auslastung dieses Angebots in den nächsten zehn Jahren beurteilen zu können, schätzt er, dass es im Januar in diesem Zeitraum insgesamt 62 Sturmtage geben wird.

1.3.1 Erläutern Sie, wie er zu diesem Wert kommen kann. 2

1.3.2 Das Wellnessangebot ist nicht rentabel, wenn es weniger als 50 Sturmtage in den nächsten zehn Jahren gibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Angebot sich nicht rentiert? 2

1.4 Der Hotelier befragt zufällig ausgewählte Gäste nach ihrer Zufriedenheit. 4
Von 120 befragten Gästen sind 96 zufrieden.
Bestimmen Sie ein 95 % Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Gäste.

15

.

Punkte

2 Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt. Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar 20 % der Tage Sturmtage sind.
Der Besitzer eines Hotels in diesem Skiort bietet folgendes Angebot für den Monat Januar:
Sieben Tage Halbpension kosten für eine Person 500 €. Falls während dieser sieben Tage mehr als zwei Sturmtage sind, erhält der Gast eine Rückerstattung vor 100 €.

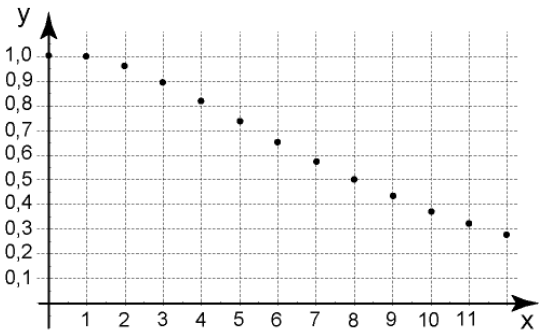
2.1 Anton bucht dieses Angebot. 5
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:

A: Anton erlebt keinen Sturmtag.
B: Anton kann nur an den ersten drei und den letzten zwei Tagen Ski fahren.
C: Anton erlebt mindestens zwei Sturmtage.

2.2 Da das Angebot nicht die erhoffte Nachfrage zeigt, möchte der Hotelier die Rückerstattung erhöhen. Prüfen Sie, ob der Hotelier die Rückerstattung auf 200 € anheben kann, wenn er mindestens 460 € pro Gast einnehmen will. 5

2.3 Anton plant seinen nächsten Skiurlaub im gleichen Skigebiet. Er stellt sich die folgende Frage: „Wie viele Tage im Januar darf ich maximal buchen, wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 60 % nicht mehr als einen Sturmtag erleben will?“ 5

Im nachfolgenden Schaubild liegen die dargestellten Punkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = 0{,}8^x + x \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{x-1}$.



Interpretieren Sie das Schaubild und beantworten Sie Antons Frage.

15

Punkte

Lineare Algebra: Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

1 Gegeben sind die Punkte A(2|0|1), B(−1|2|1), C(1|5|4) und D(3|0|5).

1.1 Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. 3

1.2 Die Punkte A, B, C und D sind Eckpunkte einer Pyramide. Zeichnen Sie die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem. 4

Beschreiben Sie die besondere Lage der Punkte A und D im Koordinatensystem.

1.3 Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. 8

Geben Sie die Koordinatenform von E an.

Prüfen Sie, ob der Punkt $P'(-5{,}5\,|\,-8\,|\,14)$ der Spiegelpunkt von $P(6{,}5\,|\,10\,|\,-12)$ bezüglich der Ebene E ist.

15

Punkte

Lineare Algebra: Matrizen (AG, BTG, EG, SGG, WG)

1.1 Drei Energieversorger A, B und C konkurrieren in einer Gemeinde um 2800 Haushalte. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Verbraucher den Energieversorger zu wechseln. 4

Von A wechseln 50 % zu B und 10 % zu C.
Von B wechseln 20 % zu A und 10 % zu C.
Von C wechseln 10 % zu A und 50 % zu B.

Die übrigen bleiben bei ihrem Versorger. Im Jahr 2014 sind 1000 Haushalte bei A und 1000 bei B, die übrigen bei C.

Geben Sie die Übergangsmatrix an. Berechnen Sie, wie viele Haushalte von den einzelnen Energieversorgern im Jahr 2015 beliefert werden.

1.2 In der Nachbargemeinde sind ebenfalls die Anbieter A und B sowie ein weiterer Anbieter D am Markt. Das Wechselverhalten der Haushalte wird mit folgender Tabelle beschrieben:

zu \ von	A	B	D
A	0,3	0,2	u
B	0,5	0,6	v
D	0,2	0,2	w

1.2.1 Angenommen, u hat den Wert 0,1. Welche Werte für v und w sind dann möglich? 4

Nehmen Sie Stellung zur Behauptung: Die Kunden von B zeigen mehr Kundentreue als die von A.

1.2.2 Bestimmen Sie u, v und w, sodass sich die Anteile der Haushalte bei den Anbietern A, B und D von einem Jahr zum anderen nicht ändern, wobei sich die Anteile von A, B und D wie 1 : 3 : 1 verhalten. 7

15

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

MUSTER 1 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2016/2017

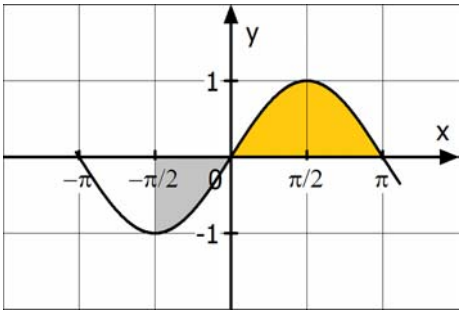
Hauptprüfung	**LÖSUNGSVORSCHLAG FÜR DAS FACH**
	Mathematik

Arbeitszeit	270 Minuten		
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen.		
Stoffgebiet	**Teil 1:**	Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben)	S. 2 - 5
	Teil 2:	Analysis (1 Aufgabe)	S. 6
		Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben)	S. 7 - 9
	Teil 3:	Stochastik (2 Aufgaben)	S. 10 - 11
	Teil 4:	Vektorgeometrie (1 Aufgabe)	S. 12
		Matrizen (1 Aufgabe)	S. 13
Bemerkungen	**Lösungsvorschlag** **nur für die Fachlehrerin/den Fachlehrer bestimmt**		

Punkte

1 Analysis

1.1 Skizze: 3



Die Fläche oberhalb der x-Achse ist größer als die Fläche unterhalb der x-Achse.
Daher ist das Integral positiv.

1.2 Aussagen über das Schaubild von f: Das Schaubild besitzt den Hochpunkt 4
$H\left(-2 \,\middle|\, \frac{19}{3}\right)$ und den Tiefpunkt $T\left(1 \,\middle|\, \frac{11}{6}\right)$.

1.3 Periode: $p = \pi$ 4

Mit der Substitution $2x = a$ erhält man die Gleichung $\cos(a) = -1$.

Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = \pi$. Mit $2x = \pi$ ergibt sich $x = \frac{\pi}{2}$.

1.4 5

	Schaubild von f	Schaubild von f′	Schaubild von f″
1.	A	E	I
2.	D	C	H
3.	G	B	F

16

Punkte

2 Stochastik

2.1 B: Bild, Z: Zahl. Ereignis A: Zweimal Z und einmal B. 2

$$P(A) = P(BZZ) + P(ZBZ) + P(ZZB) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}.$$

2.2 Gegenereignis: In einer Gruppe von fünf Freunden hat mindestens eine Person die Blutgruppe null. 2

2.3 $E(X) = 0{,}2$ 3

$-3 \cdot 0{,}2 - u + 5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0{,}2$

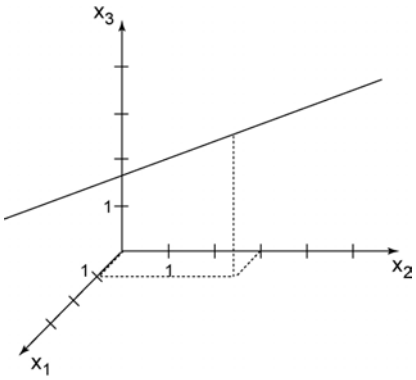
Ferner gilt: 0,2 + 0,2+ w + 0,2 = 1. Somit ist w = 0,4 .

7

Punkte

3 Vektorgeometrie

3.1 4



Die Gerade g verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene.

3.2 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile liefert $x_2 = 1$, die dritte Zeile jedoch $x_2 = \frac{7}{3}$.
Aus diesem Widerspruch folgt, dass das LGS unlösbar ist.

7

Punkte

4 Matrizen

4.1 $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$ 4

Die Elemente in der Hauptdiagonalen von M^2 geben die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Kunde zwei Wochen später wieder den gleichen Saft kauft.

4.2 $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,2 & -0,6 \\ -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3

$\Leftrightarrow 0,2x_1 - 0,6x_2 = 0 \ \wedge \ -0,2x_1 + 0,6x_2 = 0$

Folglich gilt: $x_1 = 3x_2$ und $x_2 = u$; $u \in \mathbb{R}$.

Somit ergibt sich: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3u \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$.

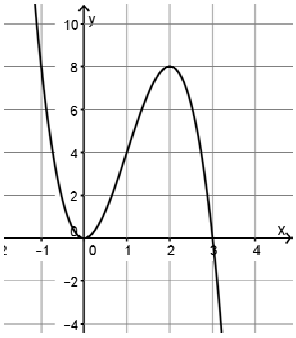
7

Punkte

1.1 Am Funktionsterm von f kann man erkennen: 2
einfache Nullstelle $x_1 = 3$, doppelte Nullstelle $x_{2,3} = 0$

Abb. A zeigt eine einfache Nullstelle bei $x = 0$, stellt also nicht K dar. 3
Abb. B zeigt eine Nullstelle bei $x = -3$, stellt also nicht K dar.
Abb. C kann K zeigen, da alle o.g. Eigenschaften gegeben sind.

Mit dieser Skalierung 1
zeigt Abb. C die Kurve K.



1.2 5

$$A = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2)dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3\right]_0^3 = -\frac{1}{2}\cdot 81 + 2\cdot 27 = 13{,}5$$

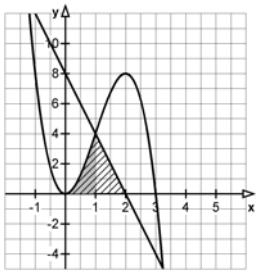
Der Flächeninhalt beträgt 13,5 FE.

1.3 $h(x) = -4x + 8$ 5
Nullstelle von h: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
Schnittstelle von Gerade und Parabel: $x = 1$ (abgelesen)

Teilfläche 1:

(Summe aus dem Inhalt der Fläche zwischen K und der x-Achse über [0;1] und dem Flächeninhalt des Dreiecks):

$$A = \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2}(2-1)\cdot 4$$



Alternative Teilfläche: Differenz aus dem Inhalt der Fläche zwischen K und der x-Achse über [1;3] und dem Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \int_1^3 f(x)dx - \frac{1}{2}(2-1)\cdot 4$

1.4 1. Falsch, da Linkskrümmung an der Stelle x = 3, also $g''(3) > 0$ 4

2. Wahr, da Hochpunkt bei x = 1

3. Falsch, da Wendepunkt mit Wechsel von Rechts- auf Linkskrümmung

4. Wahr, da $g'(3) = 0$ und durchschnittliche Änderungsrate in [1; 2] negativ

20

Punkte

2.1 x: Tage ab 1. Januar 6
s(x): Astronomische Sonnenscheindauer in Stunden

$s(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$
21.6 : x = 172 H(172|16,5)
21.12: x = 355 T(355|8)

Mittelwert: $d = \frac{16,5+8}{2} = 12,25$
Amplitude: $a = 16,5 - 12,25 = 4,25$
Periode (ein Jahr mit 365 Tagen): p = 365, $b = \frac{2\pi}{365}$
Verschiebung in x-Richtung: $355 - 365 = -10 \Rightarrow c = \frac{172+(-10)}{2} = 81$
$s(x) = 4,25 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}(x-81)) + 12,25$

2.2 Die quadratische Näherung von Tina ist zur Modellierung ungeeignet, da eine Parabel keine zwei Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt. Die Funktion beschreibt die Punktmenge nicht so gut, wie man am Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0,8745$ erkennen kann. 4
Toms Näherung beschreibt die Punktemenge besser, da das Bestimmtheitsmaß sehr nahe bei 1 liegt.

Da sich die Sonnenscheindauer als Differenz zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang ergibt, ist diese für jedes Jahr gleich.
Toms Näherungsfunktion mit der Definitionsmenge [0 ; 365] ist für jedes Jahr geeignet.

10

Punkte

3.1 $100\frac{km}{h} = 100\frac{1000\,m}{3600\,s} \approx 27{,}8\frac{m}{s}$ 4

$v(t) = \frac{100}{3{,}6}$

$\Leftrightarrow\ 70 - 70e^{-0{,}313t} = \frac{100}{3{,}6}$

$\Leftrightarrow\ e^{-0{,}313t} = \frac{70 - \frac{100}{3{,}6}}{70}$

$\Leftrightarrow\ t = -\ln\left(\frac{70 - \frac{100}{3{,}6}}{70}\right) : 0{,}313 \approx 1{,}62$

Nach etwa 1,6 Sekunden hat das Fahrzeug die Geschwindigkeit 100 $\frac{km}{h}$ erreicht.

3.2 $\bar{v} = \frac{1}{8{,}75} \cdot \int_0^{8{,}75} v(t)\,dt = \frac{1}{8{,}75} \cdot \left[\frac{70}{0{,}313}e^{-0{,}313t} + 70t\right]_0^{8{,}75}$ 6

$\approx 46{,}09$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit betrug ca. 46 $\frac{m}{s}$.

$s = \bar{v} \cdot t \approx 46{,}09 \cdot 8{,}75 \approx 403{,}3$

Die Rennstrecke ist etwa 403 m lang.

10

Punkte

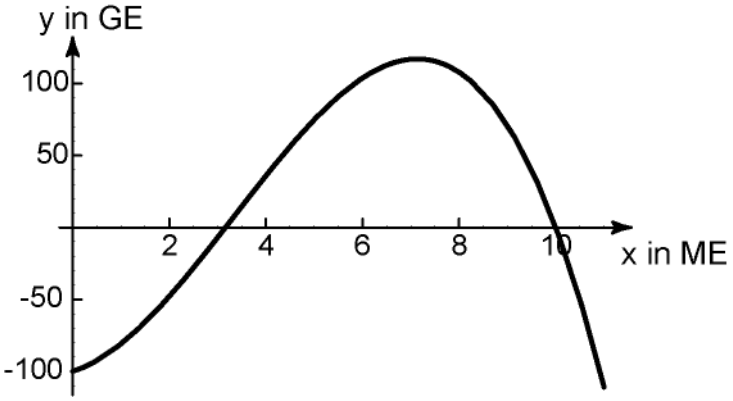
4.1 Erlösfunktion: $E(x) = 50 \cdot x$ 4

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100 \quad (0 \le x \le 11)$

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$

Da die Diskriminante D < 0 ist, hat K'(x) keine Nullstelle.
Da außerdem K'(0) = 40 > 0 ist, gilt: K'(x) > 0 für alle x-Werte.
Daher ist K streng monoton steigend, d.h., mit steigender Produnktionsmenge steigen stets die Kosten.

4.2 Mittels einer Wertetabelle erhält man das Schaubild: 4



Die Gewinnzone ist somit der Bereich $\sqrt{10} \le x \le 10$.

4.3 An der Wendestelle u des Schaubilds SK ist der Kostenzuwachs am kleinsten. 2

Mittels der Bedingung $K''(u) = 0$ erhält man $u = \frac{10}{3}$.

Wegen $K'''(\frac{10}{3}) > 0$ ist bei einer Produktionsmenge von $\frac{10}{3}$ ME der Kostenzuwachs minimal.

10

Punkte

1.1 $P(A) = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384$ 3

$P(B) = 1 - 0{,}8^7 \approx 0{,}79$

1.2 C: Anton erhält eine Rückerstattung. 4
D: Anton erlebt genau drei Sturmtage.

P(C) = 1 - P($\overline{C}$) mit $\overline{C}$: weniger als drei Sturmtage

$$P(\overline{C}) = 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}852 \Rightarrow P(C) \approx 0{,}148$$

$$P(D) = \binom{7}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^4 \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}115$$

Damit: $P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{P(D)}{P(C)} \approx \frac{0{,}115}{0{,}148} \approx 0{,}775$

Der Gast hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 77,5 % genau drei Sturmtage erlebt, falls er eine Rückerstattung erhalten hat.

1.3.1 Der Hotelier kann den Erwartungswert μ für eine Bernoulli-Kette mit der „Trefferwahrscheinlichkeit“ p = 0,2 und der Anzahl n = 310 an Januartagen bilden: $\mu = n \cdot p = 62$. 2

1.3.2 X: Anzahl der Sturmtage 2

$$P(X < 50) = \sum_{i=0}^{49} \binom{310}{i} \cdot 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{310-i} \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}0352$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 3,5 % rentiert sich das Angebot nicht.

1.4 95 % Konfidenzintervall bezüglich h = $\frac{96}{120} = 0{,}8$: 4

$$[0{,}8 - 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}};\ 0{,}8 + 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}}] \approx [0{,}728;\ 0{,}872]$$

15

Punkte

2.1 $P(A) = 0{,}8^7 \approx 0{,}21$ 5

$P(B) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 \approx 0{,}0131$

$\overline{C}$: höchstens ein Sturmtag. $P(\overline{C}) = 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2 \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}577$

$\Rightarrow P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}423$

2.2 5

Zufallsvariable X:
Einnahmen des Hoteliers

x_i	500	300
$P(X = x_i)$	0,852	0,148

mit $P(X = 500) = 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}852$

Wegen $0{,}852 \cdot 500\,€ + 0{,}148 \cdot 300\,€ = 470{,}4\,€ > 460\,€$ kann der Hotelier die Rückerstattung erhöhen.

2.3 In dem Schaubild wird die Wahrscheinlichkeit dargestellt, nach x Urlaubstagen höchstens einen Sturmtag zu erleben. 5
Diese Wahrscheinlichkeit soll mindestens 0,6 betragen, wobei gleichzeitig die Anzahl der Urlaubstage maximiert werden soll.
Aus dem Schaubild entnimmt man, dass man maximal sechs Urlaubstage buchen darf.

15

Punkte

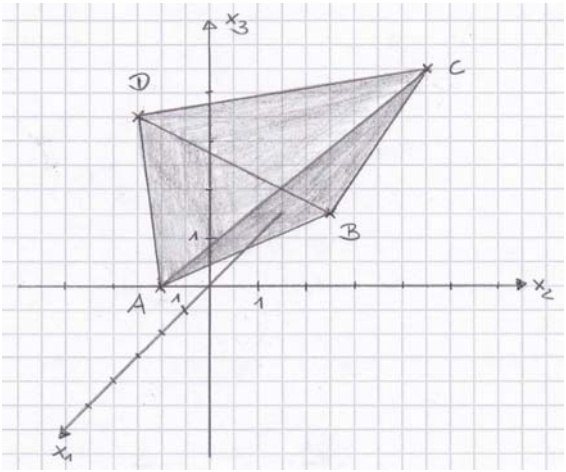
Vektorgeometrie:

1.1 3

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, liegt bei B ein rechter Winkel vor.

1.2 4



Die Punkte A und D liegen in der x_1x_3-Ebene.

1.3 8

Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich die Koordinatendarstellung von $E: 6x + 9y - 13z = -1$

Falls P' Spiegelpunkt von P bezüglich E ist, so muss gelten:

1.) $\overrightarrow{P'P}$ und $\vec{n}$ sind kollinear
2.) Der Punkt Q in der Mitte von P' und P liegt in E

$\overrightarrow{P'P} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow$ Die 1. Bedingung ist erfüllt.

Einsetzen der Koordinaten von $Q(0{,}5 \mid 1 \mid 1)$ in E ergibt: $6 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1 - 13 \cdot 1 = -1$ Also liegt Q in E und damit ist auch die 2. Bedingung erfüllt.

Damit ist P' Spiegelpunkt zu P bezüglich der Ebene E.

15

Punkte

Martizen:

1.1 4

Übergangsmatrix U = $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$

$$U \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 1600 \\ 520 \end{pmatrix}$$

Von A werden 680, von B 1600 und von C 520 Haushalte beliefert.

1.2.1 Für u = 0,1 gilt v + w = 0,9. 4
v und w können Werte aus dem Intervall [0; 0,9] annehmen.
Dabei gilt w = 0,9 – v.

Die Zahl 0,6 in der Tabelle bedeutet, dass 60 % der Kunden von B nicht wechseln, während nur 30 % der Kunden von A bei A bleiben.
Daher ist es angemessen, von größerer Kundentreue bei den Kunden von B zu sprechen.

1.2.2 7

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x \end{pmatrix}$; Die Spaltensumme ist 1, deshalb gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & u \\ 0,6 & 0,6 & v \\ 0,2 & 0,2 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,18 + 0,2\,u = 0,2 \\ 0,46 + 0,2\,v = 0,6 \\ 0,16 + 0,2\,w = 0,2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ u = 0,1 ; v = 0,7 ; w = 0,2

15

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

MUSTER 2 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2016/2017

Hauptprüfung	**AUFGABEN FÜR DAS FACH**
	Mathematik (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

Arbeitszeit	270 Minuten
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen. Die zugelassenen Hilfsmittel für die nachstehenden Aufgaben bekommt der Schüler genau dann, wenn er den ersten Teil unwiderruflich abgegeben hat.
Stoffgebiet	**Teil 1:** Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben) — S. 2 - 5 **Teil 2:** Analysis (1 Aufgabe) — S. 6 Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben) — S. 7 - 9 **Teil 3:** Stochastik (2 Aufgaben) — S. 10 - 11 **Teil 4:** Lineare Algebra: Vektorgeometrie (1 Aufgabe) — S. 12 Lineare Algebra: Matrizen (1 Aufgabe) — S. 13
Bemerkungen	In Teil 1 wählt die Fachlehrkraft das unterrichtete Wahlgebiet aus. Es sind alle 3 vorgelegten Aufgaben zu bearbeiten. (Pflichtteile: Analysis und Stochastik) In Teil 2 ist die Aufgabe 1 zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 2, 3 und 4 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. Aus Teil 3 wählt die Schülerin/der Schüler **eine** Aufgabe aus und bearbeitet sie. In Teil 4 wählt die Fachlehrkraft - je nach unterrichtetem Wahlgebiet - eine Aufgabe aus. Die vorgelegte Aufgabe ist zu bearbeiten. Sie sind verpflichtet, jeden Aufgabensatz umgehend auf seine Vollständigkeit zu überprüfen und fehlende Seiten der Aufsicht führenden Lehrkraft anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Blatt zu beginnen. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.

Punkte

1 Analysis

1.1 Die Funktion f ist gegeben durch 3

$f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f im Schnittpunkt mit der y-Achse.

1.2 Erläutern Sie eine Vorgehensweise zum näherungsweisen Lösen der Gleichung 3

$$x^3 = x + 1.$$

1.3 Das Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades verläuft durch den Ursprung und hat in $P(-2|4)$ einen Wendepunkt. Die Wendetangente schneidet die x-Achse in $Q(4|0)$. 4

Tina notiert folgende Bedingungen zur Bestimmung des Funktionsterms:

- $p(0) = 0$
- $p''(-2) = 0$
- $p(-2) = 4$
- $p(4) = 0$

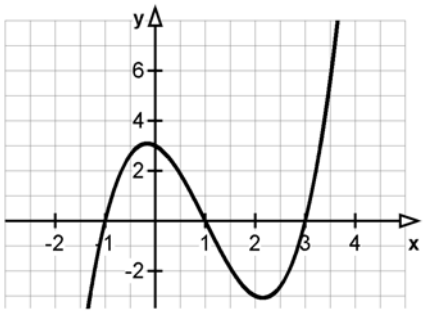
Begründen Sie, dass Tina die Informationen im Aufgabentext nicht richtig übersetzt hat.

1.4 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion g. 5
Ordnen Sie die folgenden Integralwerte der Größe nach. Begründen Sie.

(A) $\int_0^3 g(x)\,dx$

(B) $\int_{-1}^1 g(x)\,dx$

(C) $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$



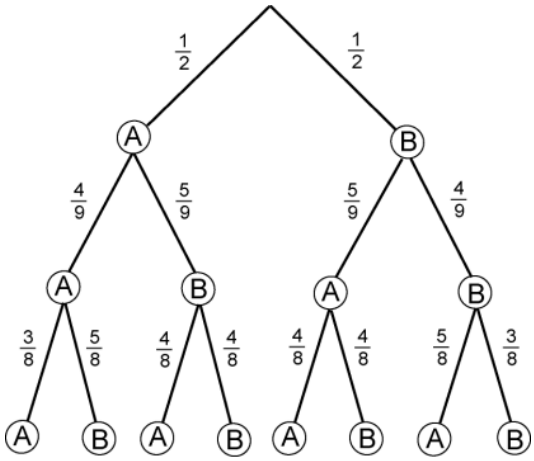
15

Punkte

2 Stochastik

2.1 Beschreiben Sie ein mögliches Zufallsexperiment, das zum nebenstehenden Baumdiagramm passt. 4

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:
„Mindestens einmal tritt A ein.“



2.2 Eine ideale Münze wird 100 Mal geworfen. Begründen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist: 3

Die Wahrscheinlichkeit für genau einmal Kopf ist kleiner als die für genau 98 Mal Kopf.

7

Punkte

3 Vektorgeometrie

3.1 Gegeben ist die Ebene E durch 4

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an,

(A) die in der Ebene E liegt,
(B) die keine gemeinsamen Punkte mit E hat.

3.2 Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge 3 LE in ein räumliches Koordinatensystem. Markieren Sie eine Kante und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der diese Kante liegt. 4

8

Punkte

4 Matrizen

4.1 Anna, Biggi und Chris schicken sich öfter SMS-Nachrichten. In der letzten Woche schrieb Anna an Biggi 58 und an Chris 42 SMS, Biggi schrieb 62 an Anna und 38 an Chris. Chris schrieb an Anna und Biggi jeweils 50 SMS. 4

Stellen Sie die SMS-Kontakte graphisch dar.
Begründen Sie, dass in der Hauptdiagonale der Matrix, die die Häufigkeit der SMS-Kontakte wiedergibt, stets 0 steht.

4.2 A, B und X sind 3x3-Matrizen. Bei welchen der folgenden Terme kann X ausgeklammert werden? 4

(1) $A \cdot X + X$
(2) $X \cdot A + B \cdot X$

In manchen Fällen kann man die Gleichung $A \cdot X + 2X = B$ nicht nach X umstellen. Geben Sie dafür eine mögliche Matrix A an.

8

Punkte

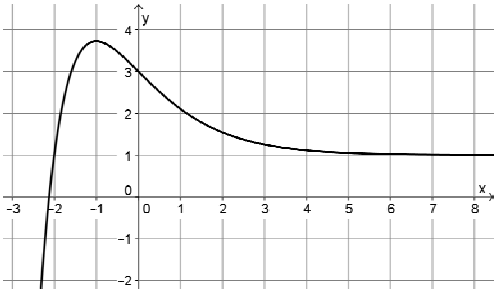
1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2\sin(\frac{\pi}{2}(x-1)) + 1;\ x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Wie entsteht das Schaubild K aus der Sinuskurve mit y = sin(x)? 7
Skizzieren Sie K.

1.1.2 Geben Sie die Koordinaten von zwei benachbarten Wendepunkten von K an. 6
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ursprungsgeraden, die parallel ist zur Normalen an K in einem dieser Wendepunkte.

1.2 Das folgende Schaubild K_g gehört zu einer Funktion g mit $g(x) = (x+a)\cdot e^{-x} + b$.



1.2.1 G ist eine Stammfunktion von g. 4
Sind folgende Aussagen wahr oder falsch?
Begründen Sie.

1. Das Schaubild von G besitzt eine schiefe Asymptote, die parallel zur 1. Winkelhalbierenden ist.
2. Das Schaubild von G besitzt an der Stelle x = – 1 einen Hochpunkt.

1.2.2 Bestimmen Sie a und b. 3

20

Punkte

2 Die von einem Röntgengerät ausgehende Strahlenbelastung kann durch eine Abschirmung reduziert werden.

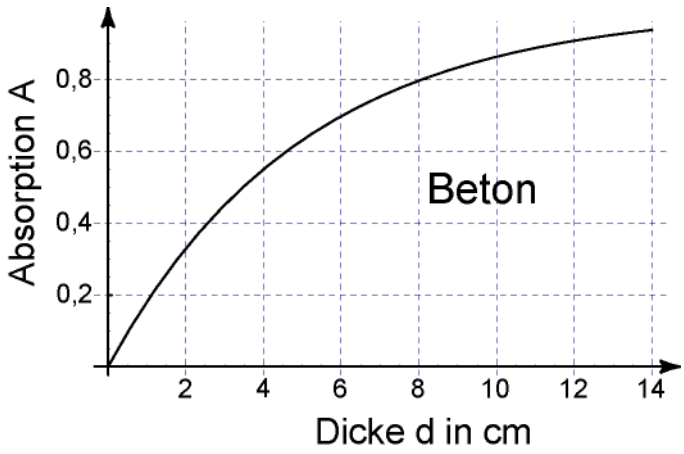
Die Absorption A gibt an, welcher Anteil der Strahlung von der Abschirmung zurückgehalten wird. Zum Beispiel bedeutet A = 0,9 , dass 90 % der Strahlung absorbiert werden.

Der Zusammenhang zwischen der Absorption und der Dicke d (in cm) des abschirmenden Materials wird näherungsweise beschrieben durch

$$A(d) = 1 - e^{-k \cdot d}.$$

Hierbei ist k $\left(\text{in } \frac{1}{\text{cm}}\right)$ eine Materialkonstante.

2.1 Für Abschirmungen durch Betonwände wurde der im folgenden Bild dargestellte Zusammenhang ermittelt: 6



Bestimmen Sie die Materialkonstante k für Beton mit Hilfe dieses Diagramms.
Wie dick muss eine Betonwand sein, damit 99 % der Strahlung absorbiert werden?

2.2 Für Aluminium hat k den Wert 0,15 und für Blei hat k den Wert 1,62. 4

Zur Abschirmung der von einem Röntgengerät ausgehenden Strahlung wird eine 51 kg schwere Bleiplatte der Dicke 5 cm verwendet.
Eine Platte aus Aluminium mit den gleichen Abmessungen wiegt 12,13 kg.
Der Kilogrammpreis für Blei liegt bei ca. 1,60 €, der für Aluminium bei ca. 1,50 €.

Zeigen Sie, dass eine ebenso gut absorbierende Abschirmung aus Aluminium wesentlich teurer ist.

10

Punkte

3 Bei einer „Holländischen Auktion“ sinkt der Preis des Verkaufsobjekts mit zunehmender Angebotsdauer.
Ein Händler möchte diese Art der Auktion testen. Er bietet hierzu über ein Internetauktionshaus eine Holzgiraffe zum Verkauf an und wählt die folgende Strategie:

- Der Startpreis wird auf das doppelte des Preises, der gerade noch kostendeckend ist, festgelegt.
- Der Preis wird an jedem Auktionstag um 4 %, bezogen auf den Preis des Vortags, gesenkt.

Die Gesamtkosten (Auktionsgebühren und Kosten für den Einkauf der Giraffe) betragen 30 Euro.

3.1 Der Händler möchte im Voraus den aktuellen Preis der Giraffe für jeden Auktionstag berechnen. Der Händler stellt hierzu einen Funktionterm für die Preisfunktion p auf: 6

$p(t) = 60 - 2{,}4 \cdot t$,

wobei $t \in \mathbb{N}$ die Zeit in Tagen nach Beginn der Auktion ist.

Ein Freund des Händlers behauptet, dass der Funktionsterm wie folgt lauten muss:

$p(t) = 60 \cdot e^{\ln(0{,}96) \cdot t}$.

Begründen Sie, mit welchem der beiden Funktionsterme der Auktionspreis richtig berechnet wird.

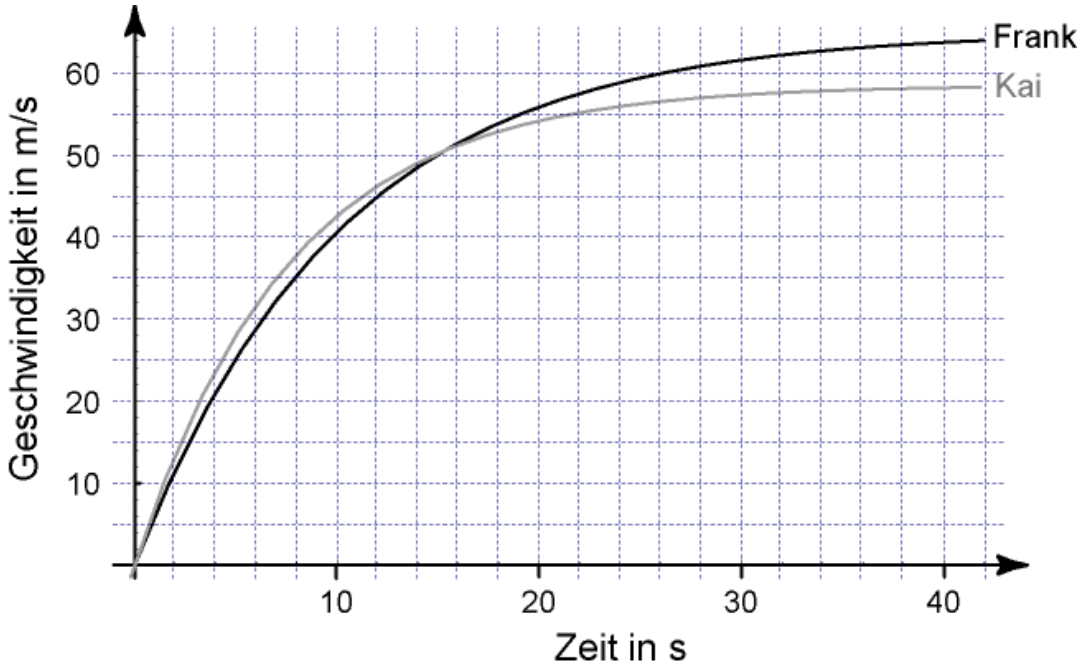
Nach wieviel Auktionstagen muss der Händler die Giraffe spätestens verkauft haben, damit er mit dem Verkauf keinen Verlust erleidet?

3.2 Auf welchen Wert muss der Prozentsatz der täglichen Preisanpassung gesenkt werden, damit der Händler erst ab dem 50. Auktionstag Verlust macht? 4
Hinweis: Beginn der Auktion bei t = 0.

10

Punkte

4 Kai und Frank liefern sich mit ihren Sportwagen ein Rennen. Hierzu fahren Sie eine 2 km lange Rennstrecke. Der Geschwindigkeitsverlauf beider Fahrzeuge ist innerhalb der ersten 42 Sekunden in der Abbildung dargestellt:



4.1 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit ist die Beschleunigung. 4

Bestimmen Sie näherungsweise mithilfe der Abbildung:
(1) Die maximale Beschleunigung, die Kai erfährt.
(2) Den Zeitpunkt, zu dem Frank und Kai gleich stark beschleunigen.

4.2 Die Funktion v mit 6

$$v(t) = -65 \cdot e^{-0{,}098t} + 65 \; ; \; 0 \le t \le 42$$

gibt näherungsweise den in der Abbildung dargestellten Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und der Zeit t von Franks Wagen wieder.

Hierbei wird v(t) in Metern pro Sekunde ($\frac{m}{s}$) und t in s angegeben.

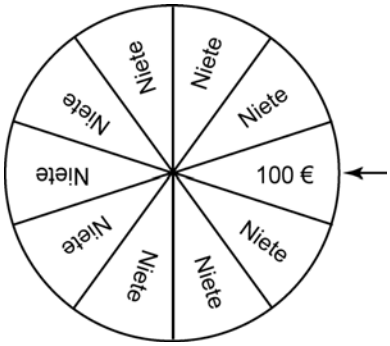
Die Geschwindigkeit ist die momentane Änderungsrate der zurückgelegten Wegstrecke.
Welche Wegstrecke hat Frank nach 40 Sekunden Fahrt zurückgelegt?

Kai hat nach 40 Sekunden 1941 m Wegstrecke zurückgelegt.
Begründen Sie, warum Frank sicher als Sieger aus dem Rennen hervorgeht.

10

Punkte

1 Ein Autohaus bietet seinen Besuchern bei einer Präsentation der neuen Modelle folgendes Glücksspiel an: Das rechts abgebildete Glücksrad, bestehend aus zehn gleich großen Sektoren, wird in Drehung versetzt. Bei Stillstand zeigt der Pfeil zufällig auf genau einen Sektor.



Ein Teilnehmer zahlt einen Einsatz und darf das Glücksrad drehen. Zeigt der Pfeil am Ende der Drehung auf den Sektor „100 €“, so erhält der Teilnehmer diesen Betrag. Ansonsten geht er leer aus. Der Teilnehmer darf so lange weiterspielen, bis er ein zweites Mal „100 €“ gewinnt oder aber ein zweites Mal leer ausgeht.

1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm zum beschriebenen Glücksspiel. 4

1.2 Welchen Einsatz muss das Autohaus von einem Teilnehmer verlangen, damit das Spiel fair ist? 4

1.3 Ein Besucher nimmt am Spiel teil und zählt zu den glücklichen Gewinnern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war das Spiel nach drei Drehungen zu Ende? 3

1.4 Am Ende des Tages wurde das Spiel 180mal von den Besuchern gespielt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als zehnmal 200 € gewonnen wurden? 4

15

.

Punkte

2 Eine Werkstattkette bietet vor der kalten Jahreszeit seinen Kunden die Angebote „Wintercheck“ sowie „Reifenwechsel“ an.
60 % aller Kunden nehmen das Angebot „Wintercheck“ an, 30 % nutzen die Möglichkeit des Reifenwechsels. 28 % aller Kunden nehmen keines der beiden Angebote wahr.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde zugleich beide Angebote annimmt. 5

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Kunde für genau eines dieser Angebote entscheidet?

2.2 Das Angebot „Wintercheck“ kostet 19 €, das Angebot „Reifenwechsel“ kostet 9 €. Damit sich die Angebote lohnen, muss die Werkstatt täglich insgesamt mindestens 800 Euro Umsatz mit beiden Angeboten machen. 4
Wieviel Kunden müssen die Werkstatt täglich im Mittel aufsuchen, damit sich die Angebote für die Werkstatt lohnen?

2.3 Eine Stichprobe hat ergeben, dass 85 von 1000 Winterchecks nicht ordnungsgemäß ausgeführt wurden. Mit p wird die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Wintercheck nicht ordnungsgemäß ausgeführt wurde. 6
Geben Sie einen Schätzwert für p an. Ermitteln Sie ein Vertrauensintervall für p zum Konfidenzniveau 95 %.

15

Punkte

Lineare Algebra: Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)

1 Gegeben sind die Gerade g sowie die Ebene E durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

1.1 Bestimmen Sie den Abstand, den E zum Ursprung hat. 3

1.2 Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Ebene E in einem Punkt schneiden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes und berechnen Sie den Schnittwinkel. 6

1.3 Die Ebene F verläuft durch den Punkt A(–5|0|1) und ist orthogonal zur Geraden g. Welche besondere Lage hat F im Koordinatensystem? 6

Begründen Sie, dass sich die beiden Ebenen E und F in einer Geraden schneiden.

15

Punkte

Lineare Algebra: Matrizen (AG; BTG, EG, SGG, WG)

1 Im April ist das Wetter am Bodensee äußerst wechselhaft. Erfahrungsgemäß folgt auf einen überwiegend regnerischen Tag (R) mit 10 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend sonniger Tag (S) und mit 30 % Wahrscheinlichkeit ein überwiegend trüber Tag (T). Die Wahrscheinlichkeit, dass auf einen Sonnentag wieder ein Sonnentag oder aber ein Regentag folgt, ist ebenfalls jeweils 30 %. Auf einen trüben Tag folgt mit 70 % Wahrscheinlichkeit ein Regentag, und mit 20 % Wahrscheinlichkeit bleibt es trübe.

1.1 Veranschaulichen Sie diese Informationen in einem Übergangsgraphen und ergänzen Sie die fehlenden Angaben. 4

1.2 Ein Online-Wetterdienst sagt für den 1. April 2015 für die Bodenseeregion voraus, dass es mit 30 % Wahrscheinlichkeit regnet und mit 20 % Wahrscheinlichkeit sonnig ist. 5

Wie groß müssen die Wahrscheinlichkeiten für einen Sonnentag bzw. für einen trüben Tag am 1. April 2015 sein, damit die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Folgetag größer wird?

1.3 Es wird angenommen, dass sich die Übergangswahrscheinlichkeiten für die drei Wetterzustände R, S und T am Bodensee nicht ändern. Zeigen Sie, dass es dann eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die auf Dauer stabil bleibt. 6

15

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

MUSTER 2 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2016/2017

Hauptprüfung	**LÖSUNGSVORSCHLAG FÜR DAS FACH**
	Mathematik

Arbeitszeit	270 Minuten		
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen.		
Stoffgebiet	**Teil 1:**	Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben)	S. 2 - 5
	Teil 2:	Analysis (1 Aufgabe)	S. 6
		Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben)	S. 7 - 9
	Teil 3:	Stochastik (2 Aufgaben)	S. 10 - 11
	Teil 4:	Vektorgeometrie (1 Aufgabe)	S. 12
		Matrizen (1 Aufgabe)	S. 13
Bemerkungen	**Lösungsvorschlag** **nur für die Fachlehrerin/den Fachlehrer bestimmt**		

Punkte

1 Analysis

1.1 $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$. 3

$f'(x) = \cos(2x)$

$f(0) = -1;\ \ f'(0) = 1$

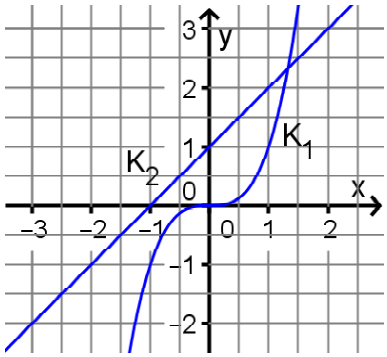
Gleichung der Tangente in P(0|–1): y = x – 1

1.2 Die Lösung kann z. B. graphisch als Schnittstelle der Graphen der beiden Funktionen g_1 und g_2 mit 3

$g_1(x) = x^3$ und $g_2(x) = x + 1$

bestimmt werden. Aus der Zeichnung ist erkennbar, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, d.h. die Gleichung hat nur eine Lösung.
Der x-Wert des Schnittpunktes ist die Lösung der Gleichung.

Skizze



1.3 Die ersten drei Bedingungen entsprechen den Informationen im Text: 4

- $p(0) = 0$ K verläuft durch den Ursprung.
- $p''(-2) = 0$ K hat bei x = –2 eine Wendestelle.
- $p(-2) = 4$ K verläuft durch den Punkt P(–2 | 4).

Die Information über den Schnittpunkt der Wendetangente mit der x-Achse hat Tina falsch interpretiert. Ihre vierte Bedingung würde gelten, wenn auch K die x-Achse im Punkt Q schneiden würde.

1.4 (A) < (C) < (B) 5

Im Intervall [0;3] schließt das Schaubild mit der x-Achse zwei Teilflächen ein, von denen diejenige unterhalb der x-Achse größer ist als die oberhalb der x-Achse. Daher ist (A) negativ.

Im Intervall [–1;1] schließt das Schaubild mit der x-Achse eine Fläche ein, die ganz oberhalb der x-Achse liegt. Daher ist (B) positiv. Der Flächeninhalt ist etwa 4 FE.

Im Intervall [–1;3,5] schließt das Schaubild mit der x-Achse drei Teilflächen ein. Zwei der Flächen sind gleich groß: eine liegt oberhalb, die andere unterhalb der x-Achse. Die dritte Teilfläche im Intervall [3;3,5] liegt oberhalb der x-Achse mit einem Flächeninhalt von ca. 1,5 FE. (C) liegt somit zwischen (A) und (B).

16

Punkte

2 Stochastik

2.1 In einer Urne sind 5 Kugeln mit der Aufschrift A und 5 Kugeln mit der Aufschrift B. Aus der Urne wird 3 Mal ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen. 4

P(„Mindestens einmal tritt A ein“) = $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

2.2 X: Anzahl von Kopf 3

$P(X = 1) = 100\cdot 0{,}5^{100}$; $P(X = 98) = \binom{100}{98}\cdot 0{,}5^{100}$

$\binom{100}{98} = \frac{100\cdot 99}{2} > 100$,

also ist $P(X = 1) < P(X = 98)$, die Aussage ist also wahr.

7

Punkte

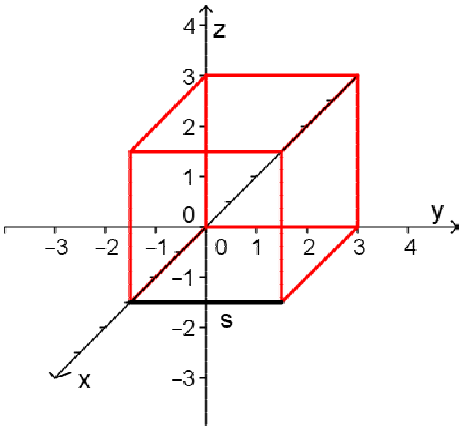
3 Vektorgeometrie

3.1 4

(A): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad u \in \mathbb{R}.$

(B): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad v \in \mathbb{R}.$

3.2 4



Beispiel:
Die Kante s liegt auf der Geraden mit der Gleichung

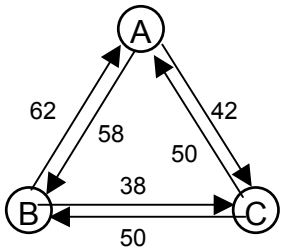
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$

8

Punkte

4 Matrizen

4.1 4



In der Hauptdiagonale der Matrix stehen die Häufigkeiten, mit der jede Person SMS an sich selbst schickt. Das ist nicht möglich, daher steht hier stets 0.

4.2 Bei (1) kann X ausgeklammert werden: $A \cdot X + X = (A + E) \cdot X$ 4

Bei (2) kann X nicht ausgeklammert werden, da X von links mit A und von rechts mit B multipliziert wird.

Wenn A + 2E nicht invertierbar ist, kann man die Gleichung $A \cdot X + 2X = B$ nicht nach X umstellen.

Eine mögliche Matrix dafür ist $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

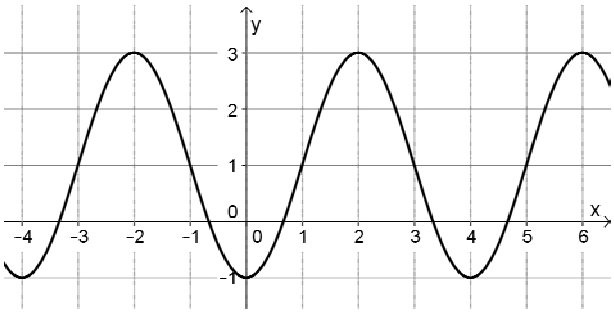
8

Punkte

1.1 Strecken in y-Richtung mit Faktor 2, 4

Strecken in x-Richtung mit Faktor $\frac{2}{\pi}$,

Verschieben in y-Richtung um eine Längeneinheit (LE) und Verschieben in x-Richtung um eine LE.



3

1.2 $W_1(1|1)$, $W_2(3|1)$ 6

$f'(x) = \pi \cdot \cos(\frac{\pi}{2}(x-1))$

Verwendung von W_2: $f'(3) = \pi \cdot \cos(\pi) = -\pi$

$m_T = -\pi$ $m_N = \frac{1}{\pi}$ Ursprungsgerade: $y = \frac{1}{\pi}x$

(oder $y = -\frac{1}{\pi}x$ bei W_1)

2.1 1. Richtig, da K_g die Asymptote mit der Gleichung y = 1 hat. Durch Integration wird daraus die Asymptote mit der Gleichung y = x. 4

2. Falsch, da dort ein Wendepunkt vorliegt.

2.2 Aus dem Schaubild liest man ab: 3

b = 1 (Asymptote)

g(0) = 3: $a + b = 3 \Rightarrow a = 2$

20

Punkte

2.1 Aus der Zeichnung liest man ab: 6

$A(8) = 0,8$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-8 \cdot k} = 0,8$

$\Leftrightarrow 0,2 = e^{-8 \cdot k}$

$\Leftrightarrow k = -\frac{\ln(0,2)}{8} \approx 0,201$

Die Materialkonstante hat etwa den Wert 0,2 cm^{-1}.

Wanddicke d:

$A(d) = 0,99$

$\Leftrightarrow 1 - e^{-k \cdot d} = 0,99$

$\Leftrightarrow d = -\frac{\ln(0,01)}{k} = \frac{8 \cdot \ln(0,01)}{\ln(0,2)} \approx 22,89$

Die Wanddicke muss etwa 23 cm betragen.

2.2 Beide Platten absorbieren gleich stark: 4

$1 - e^{-0,15 \cdot d} = 1 - e^{-1,62 \cdot 5}$

$\Leftrightarrow \quad -0,15 \cdot d = -8,1$

$\Leftrightarrow \quad d = 54$

Man benötigt eine 54 cm dicke Aluminiumplatte, um die gleiche Absorption zu erreichen. Falls Aluminiumplatten mit der Dicke 5 cm verwendet werden, sind 11 Aluminiumplatten erforderlich.

Diese 11 Aluminiumplatten haben die Masse 133,43 kg und kosten $133,43 \cdot 1,50\,€ \approx 200,15\,€$.

Die Bleiplatte kostet $51 \cdot 1,60\,€ = 81,60\,€$.

Die Aluminiumabschirmung ist mehr als doppelt so teuer.

10

Punkte

3.1 Der Funktionsterm $p(x) = 60 - 2{,}4 \cdot t$ kann die zeitliche Entwicklung des Auktionspreises nicht korrekt beschreiben, da bei diesem Term der Auktionspreis täglich um 4 % bezogen auf den Startpreis sinkt und nicht, wie in der Strategie des Händlers gefordert, um 4 % bezogen auf den Preis des Vortags abnimmt. 6

Der Funktionsterm $p(t) = 60 \cdot e^{\ln(0{,}96)\cdot t} = 60 \cdot (1 - 0{,}04)^t$ beschreibt das zeitliche Verhalten des Auktionspreises korrekt.

Kein Verlust: $p(t) \geq 30$

$\Leftrightarrow\ 60 \cdot e^{\ln(0{,}96)t} \geq 30$

$\Leftrightarrow\ e^{\ln(0{,}96)t} \geq 0{,}5$

$\Leftrightarrow\ t \leq \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}96)} \approx 16{,}98$

Spätestens am 17. Auktionstag (Auktionsstart: t = 0) muss die Giraffe verkauft sein, falls der Händler keinen Verlust erleiden möchte.

3.2 Verlust am 50. Auktionstag, d.h., t = 49. Also darf es für t = 48 weder Gewinn noch Verlust geben. 4

q: Prozentsatz

$p(48) = 60 \cdot e^{\ln(1-q)\cdot 48} = 30$

$\Rightarrow (1-q)^{48} = 0{,}5$

$\Rightarrow 1 - q = \sqrt[48]{0{,}5} = 0{,}5^{\frac{1}{48}}$

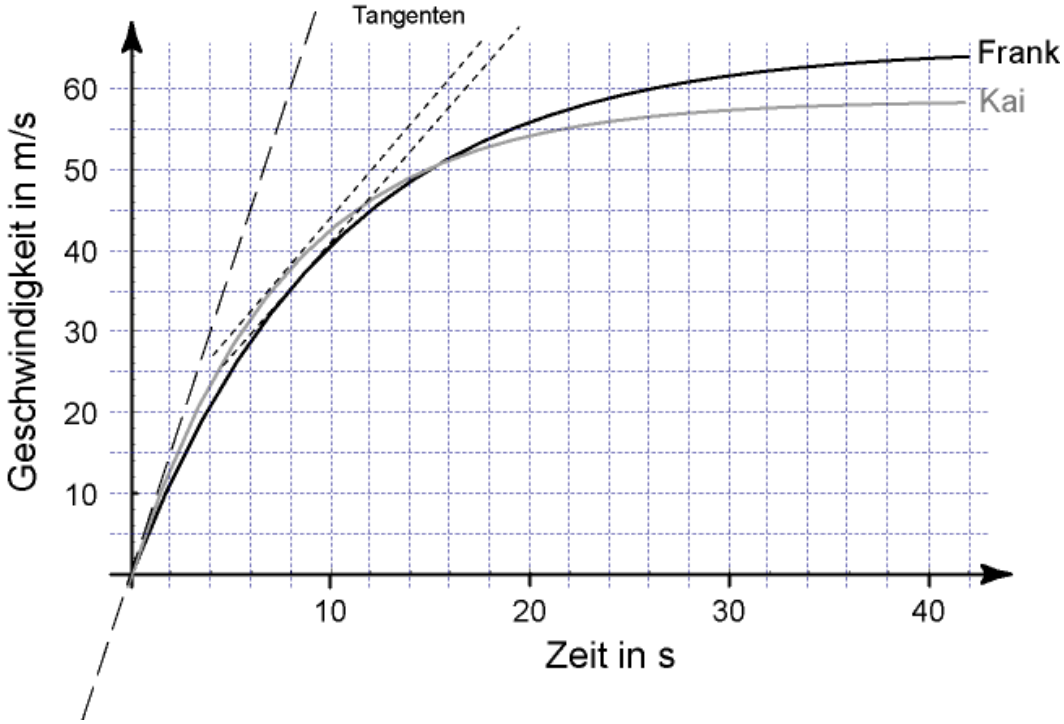
$\Rightarrow q \approx 0{,}0143$

Der Prozentsatz muss etwa 1,43 % betragen.

10

Punkte

4.1 Frank erfährt die maximale Beschleunigung während des Starts: 4



Die Tangente im Ursprung hat etwa die Steigung $m = \frac{30}{4} = 7{,}5$.

Damit beträgt die maximale Beschleunigung etwa 7,5 $\frac{m}{s^2}$.

Frank und Kai beschleunigen bei etwa t = 8 Sekunden gleich stark, da zu diesem Zeitpunkt beide Kurven parallel verlaufen.

4.2 Franks zurückgelegte Wegstrecke: 6

$$s = \int_0^{40} v(t)\,dt = \left[\frac{65}{0{,}098} e^{-0{,}098 \cdot t} + 65t\right]_0^{40} \approx 1949{,}9$$

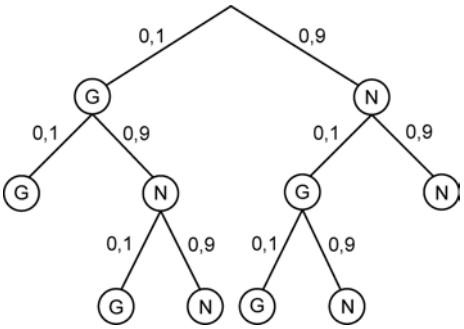
Frank hat nach 40 Sekunden etwa 1950 Meter zurückgelegt.

Frank liegt nach 40 Sekunden vor Kai. Da Franks Geschwindigkeit größer ist als Kais Geschwindigkeit, wird er das Rennen gewinnen.

10

Punkte

1.1 G: 100 € Gewinn 4
N: Niete



1.2 G: Gewinn 4

$$P(G=100)=2\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=0{,}162$$

$$P(G=200)=\left(\frac{1}{10}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{9}{10}=0{,}028$$

Damit: $E(G)=0{,}162\cdot 100\,€+0{,}028\cdot 200\,€=21{,}80\,€$

Die Teilnahmegebühr muss 21,80 € betragen, damit das Spiel fair ist.

1.3 A: Mindestens ein Gewinn von 100 €. 3
B: Genau drei Drehungen bis Spielende.

$$P(A)=0{,}1^2+2\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9+2\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2=0{,}19$$

$$P(B)=1-(0{,}1^2+0{,}9^2)=0{,}18$$

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}\approx 0{,}947$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95 % geht das Spiel nach drei Drehungen zu Ende unter der Voraussetzung, dass ein Geldbetrag gewonnen wurde.

1.4 C: In einem Spiel genau 200 € gewonnen. 4

$$P(C)=0{,}1^2+2\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9=0{,}028$$

D: Nach 180 Spielen wurden mehr als zehnmal 200 € gewonnen.

$$P(D)=1-\sum_{k=0}^{10}\binom{180}{k}\cdot 0{,}028^k\cdot 0{,}972^{180-k}\approx 0{,}013$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 180 Spielen mehr als zehnmal 200 € gewonnen wurden, beträgt etwa 1,3 %.

15

Punkte

2.1 A: Kunde nimmt das Angebot „Wintercheck“ an. 5
B: Kunde nimmt das Angebot „Reifenwechsel“ an.

Vierfeldertafel:

	A	$\overline{A}$	
B	0,18	0,12	**0,3**
$\overline{B}$	0,42	**0,28**	0,7
	0,6	0,4	**1**

C: Kunde nimmt beide Angebote wahr.
$P(C) = P(A \cap B) = 0{,}18$

D: Kunde entscheidet sich für genau ein Angebot.
$P(D) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0{,}54$

2.2 X: Umsatz 4
n: Anzahl täglicher Kunden

$E(X) = 19 \cdot n \cdot 0{,}6 + 9 \cdot n \cdot 0{,}3 = 800$
$\Rightarrow n = 56{,}7...$

Im Mittel müssen die Werkstatt täglich mindestens 57 Kunden besuchen, damit sich die Angebote lohnen.

2.3 6

Schätzer für p: $\frac{85}{1000} = 8{,}5\,\%$

95 %-Vertrauensintervall:

$$0{,}085 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}085 \cdot 0{,}915}{1000}} \le p \le 0{,}085 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}085 \cdot 0{,}915}{1000}}$$

Also $7{,}62\,\% \le p \le 9{,}38\%$.

15

Punkte

Vektorgeometrie:

1.1 d: Abstand E zum Ursprung. 3

$$d = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{9+4+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt{14}} \approx 0{,}267$$

Der Abstand der Ebene E zum Ursprung beträgt etwa 0,3 LE.

1.2 Schnitt von g und E: 6

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3+t \\ 2-t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = 4$$

Die Gleichung hat genau eine Lösung. Die Ebene E und die Gerade g schneiden sich in dem Punkt D(1|1|–2).

Berechnung des Schnittwinkels:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{28}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 34{,}54°$$

1.3 Der Richtungsvektor von g ist gleichzeitig der Normalenvektor von F. 6

$$F: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Die Ebene F verläuft parallel zur x_1-Achse.

Zwei Ebenen können parallel zueinander liegen, identisch sein oder sich in einer Geraden schneiden. Die Ebenen schneiden sich in einer Geraden, wenn ihre Normalenvektoren keine Vielfachen voneinander sind.
Die beiden Normalenvektoren lauten:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ für alle $k \in \mathbb{R}$.

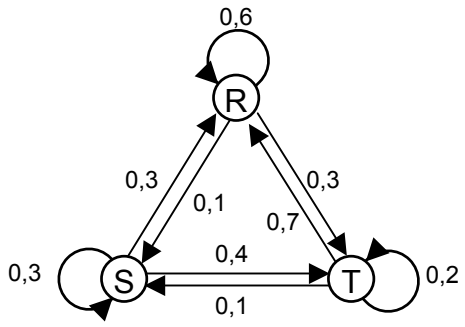
Also schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden.

15

Punkte

Matrizen:

1.1 4



1.2 5

$$\vec{y_1} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ a \\ 0{,}7 - a \end{pmatrix} \qquad \vec{y_2} = A \cdot \vec{y_1} = \begin{pmatrix} 0{,}67 - 0{,}4a \\ 0{,}10 + 0{,}2a \\ 0{,}23 + 0{,}2a \end{pmatrix}$$

WS für einen sonnigen Tag: $0{,}1 + 0{,}2a > a \Leftrightarrow a < 0{,}125$
WS für einen trüben Tag: $0{,}7 - a > 0{,}575$

Die Wahrscheinlichkeit für einen sonnigen Tag muss kleiner sein als 12,5 % und die für trübes Wetter muss größer sein als 57,5 %.

1.3 $A \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow (E - A) \cdot \vec{x} = \vec{o}$ 6

LGS: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}4 & -0{,}3 & -0{,}7 & 0 \\ -0{,}1 & 0{,}7 & -0{,}1 & 0 \\ -0{,}3 & -0{,}4 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 25 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2{,}08\,\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}44\,\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen: $\vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} 2{,}08 \\ 0{,}44 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die stabile Wahrscheinlichkeitsverteilung ist diejenige Lösung, bei der die Komponenten die Summe 1 haben:
$3{,}52\,\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha \approx 0{,}284$

15